DOC4 Mesure et incertitudes

1/ Introduction

➤ Quelques définitions

▪ **« Le mesurande »** (noté **M**) est la grandeur physique dont on désire déterminer la valeur

EX : *Quelques mesurandes :*
la tension U, la concentration C, la longueur L

▪ On appelle « **mesurage »** l'ensemble des opérations permettant de déterminer la valeur du mesurande.

EX : *Quand on mesure la valeur de la résistance R d'un conducteur ohmique : le mesurande est la résistance R de ce dipôle, le mesurage est effectué, par exemple, avec un ohmmètre.*

▪ **« La mesure »** (noté **m**) est le résultat du mesurage, autrement dit la valeur du mesurande

▪ La méthode du mesurage est dite **« directe »** lorsque l'instrument de mesure fournit directement la valeur m.

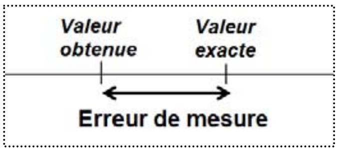
EX : *mesurage d'une longueur par une règle*

▪ La méthode du mesurage est dite **« indirecte »** si la mesure est obtenue à partir de la valeur d'autres grandeurs

EX : *Mesurage de la masse volumique d'un liquide à partir des valeurs de sa masse et de son volume*

▪ **Une grandeur d'influence** est une grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur la valeur mesurée.

➤ Des erreurs de mesures inévitables



▪ En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesures exactes. Les mesures sont entachées d'erreurs plus ou moins importantes en fonction de la qualité des instruments, de l'habileté du manipulateur . . .
La mesure ne pouvant être absolument précise, il existe inexorablement un écart entre la valeur obtenue et **la valeur exacte (appelée valeur vraie), qui restera toujours inconnue.**

Cet écart est appelé **erreur de mesure**. La valeur vraie restant inconnue, l'erreur de mesure restera également indéterminée.

▪ Lors d'un mesurage, le scientifique cherche à réduire l'erreur, donc il doit être capable de l'identifier et de l'estimer.

➤ Des erreurs aléatoires

▪ Si on effectue N mesures d'un même mesurande avec le même matériel et dans les mêmes conditions, on constate souvent que les N mesures n'ont pas la même valeur. D'une mesure à l'autre, l'erreur n'a pas la même valeur et l'on dit que **l'erreur est aléatoire**.

↳ Cette dispersion des valeurs mesurées est due :

- à la qualité de la mesure réalisée par l'opérateur *(maladresse du manipulateur, fatigue, mauvaise lecture d'une graduation, mauvais ajustement d'un ménisque...)*

- à la qualité de l'instrument de mesure *(voir ci-dessous).*

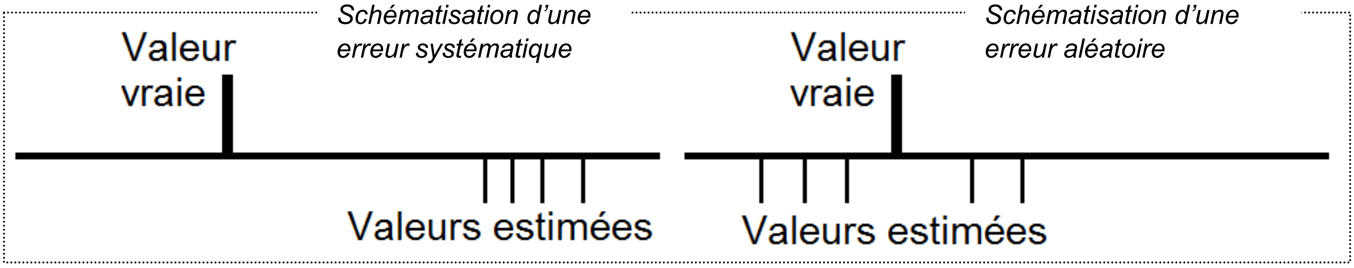
➤ Des erreurs systématiques

▪ Quelquefois les N mesures ont la même valeur et on « ne voit pas » l'erreur aléatoire. Mais la valeur déterminée est toujours différente de la vraie valeur

Dans ces conditions l'erreur prend la même valeur lors de chaque mesure et l'on dit qu'il s'agit d'**une erreur systématique**

↳ Cette dispersion des valeurs mesurées est due :

- à l'appareil de mesure *(appareil de mauvaise qualité, défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement)*
- au protocole inadapté
- variabilité de la grandeur mesurée avec un facteur extérieur *(le volume dépend de la température...)*



➤ Qualité de l'appareil de mesure

▪ <u>« La fidélité d'un appareil »</u>

La fidélité d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications très voisines lors de l'application répétée de la même mesure dans les mêmes conditions.

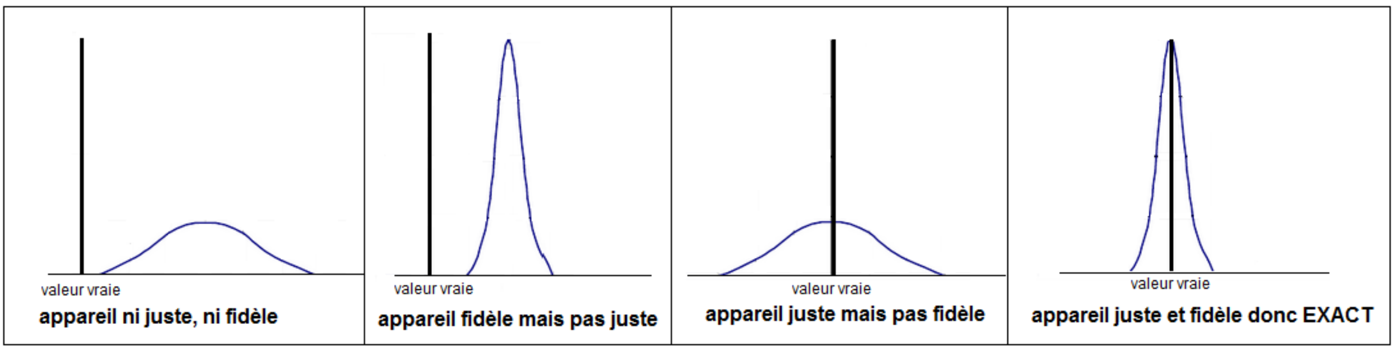
▪ <u>« La justesse d'un appareil »</u>

Étroitesse de l'accord entre la valeur <u>MOYENNE</u> obtenue à partir d'une large série de résultats de mesures et la valeur vraie.

▪ <u>« L'exactitude d'un appareil »</u>

Étroitesse de l'accord entre <u>UNE</u> valeur mesurée et la valeur vraie du mesurande.

Il est important de ne pas confondre les concepts d'exactitude et de justesse



2/ Présentation d'un résultat

▪ Présenter la mesure d'un mesurande consiste à indiquer la valeur de la grandeur mesurée avec son unité, mais aussi à préciser l'incertitude de la mesure pour informer sur sa précision.

↳ *<u>Présentation du résultat d'une mesure</u>* : $\boxed{\mathbf{M = (m \pm \Delta m)\ unité}}$

M : Mesurande, grandeur mesurée *(vitesse, température, masse . . .)*

m : mesure *(exprimée préférentiellement avec l'écriture scientifique)*

Δm : incertitude de la mesure, appelée également **incertitude-élargie** *(arrondie à la valeur supérieure avec un seul chiffre significatif ou 2 au maximum)*

▪ Le dernier chiffre significatif de m est incertain, il doit être situé à la même position décimale que celui de Δm

<u>EX</u> : V = (153 ± 2) km.h^{-1} ; C = (0,15 ± 0,05) mol.L^{-1} ; m = (25,1 ± 0,8) g

↳ *<u>Présentation du résultat à l'aide d'un intervalle de confiance :</u>* **[m – Δm ; m + Δm]**

↳ *<u>Présentation du résultat à l'aide d'un encadrement :</u>* **m – Δm ≤ m ≤ m + Δm**

▪ En général, la largeur de l'intervalle de confiance est choisie pour avoir au moins 95% de chance de trouver la valeur vraie à l'intérieur.

<u>EX</u> : *Le mesurande est une résistance R. La valeur mesurée est 102,50 Ω. L'incertitude de mesure est de 0,25 Ω et le niveau de confiance est de 95 %.*
Le résultat de mesure est noté $R_{95\%}$ = (102,50 ± 0,25) Ω , avec un niveau de confiance de 95 %.
Cela signifie qu'il y a 95 chances sur 100 pour que la valeur vraie du mesurande appartienne à l'intervalle [102,25 Ω ; 102,75Ω]

▪ La qualité de la mesure est d'autant meilleure que l'incertitude associée est petite.

▪ Pour évaluer la qualité d'une mesure, on peut également indiquer **son incertitude relative** : $\boxed{\dfrac{\Delta m}{m}}$

<u>EX</u> : *V = (153 ± 2) km.h^{-1} → la valeur est donnée à* $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{2}{153} = 0{,}013 = 1{,}3\ \%$

C = (0,15 ± 0,05) mol.L^{-1}→ la valeur est donnée à $\dfrac{\Delta C}{C} = \dfrac{0{,}05}{0{,}15} = 0{,}33 = 33\ \%$

▪ Si on ne dispose pas d'information concernant la manière dont les mesures ont été faites, on considère que le dernier chiffre significatif est connu à ± 0,5

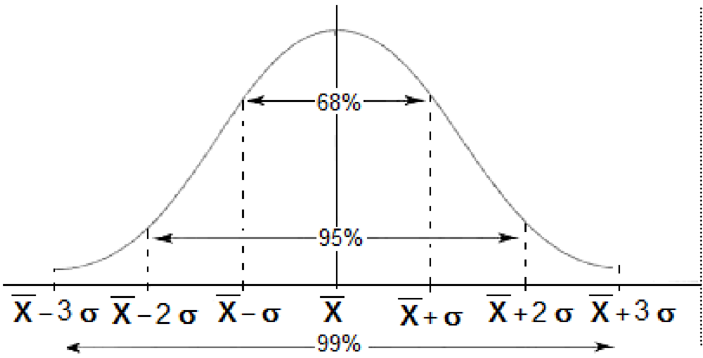
<u>EX</u> : *Si on indique d = 17,3 cm sans indication supplémentaire, on suppose que 17,25 cm < d < 17,35 cm donc d = (17,30 ± 0,05) cm*

3/ Evaluer l'incertitude d'une mesure

➤ Cas d'une mesure effectuée plusieurs fois *(incertitude de type A)*

▪ Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois le mesurage de la même grandeur, dans les mêmes conditions expérimentales, on dit que les mesures sont effectuées dans **les conditions de répétabilité** ; l'opérateur peut trouver des résultats différents. Il en est de même pour des opérateurs différents réalisant simultanément le mesurage de la même grandeur avec du matériel similaire.

▪ Dans de tels cas, on utilise des notions de statistiques pour analyser les résultats. Par exemple, la meilleure valeur à retenir pour la grandeur mesurée est la **valeur moyenne des mesures effectuées**.



↳ ***68%*** *des mesures se trouvent dans l'intervalle* $[\ \overline{X}-\sigma\ ;\ \overline{X}-\sigma\ ]$

↳ ***95%*** *des mesures se trouvent dans l'intervalle* $[\ \overline{X}-2\sigma\ ;\ \overline{X}-2\sigma\ ]$

↳ ***99%*** *des mesures se trouvent dans l'intervalle* $[\ \overline{X}-3\sigma\ ;\ \overline{X}-3\sigma\ ]$

▪ **L'incertitude** (appelée dans ce cas « **incertitude de répétabilité** » ou **incertitude de type A**) dépend :

- de **l'écart-type** de la série de mesures,
- du **nombre de mesures n** indépendantes
- du **facteur d'élargissement k** (qui dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi).

▪ De manière générale, la répétition des mesures améliore la précision.

↳ ***Moyenne de la série de mesure :*** $\boxed{\overline{m} = \dfrac{\sum m}{n}}$

↳ ***Ecart-type :*** $\boxed{\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum\left(m-\overline{m}\right)^2}{n-1}}}$

L'écart-type est une mesure de dispersion des données autour de la valeur moyenne $\overline{m}$: la dispersion est d'autant plus grande que l'écart type est grand.

↳ **Incertitude sur la mesure :** $\boxed{\Delta m = k \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Le facteur k dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi. Sa valeur est donnée par un tableau issu d'une loi statistique dite « loi de Student » (extrait ci-dessous) :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$K_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$K_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

➤ Cas d'une mesure unique *(incertitude de type B)*

▪ Quand on effectue une seule mesure, il faut estimer l'incertitude à partir de l'analyse des causes d'erreurs et évaluer l'incertitude associée à chaque source d'erreur.
Certaines de ces erreurs aléatoires peuvent être estimées à partir de la notice du constructeur de l'appareil de mesure. On peut par exemple prendre en compte :

- **la tolérance du constructeur**
- **la résolution de l'appareil (graduation, ou digit)**
- **la précision de l'appareil**

Lecture simple sur une échelle graduée	
EX : Thermomètre à alcool, éprouvette graduée...	
→ Lorsque la mesure est obtenue par lecture sur une échelle ou un cadran, l'incertitude de la mesure liée à la lecture est estimée à *(pour un niveau de confiance de 95%)* :	$\boxed{\Delta m = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \text{graduation}}$
Lecture double sur une échelle graduée	
EX : Lecture sur une règle, sur l'écran d'un oscilloscope...	
→ Lorsque la mesure nécessite une double lecture, les incertitudes liées à la lecture se cumulent ; l'incertitude de la mesure liée à la lecture est estimée à *(pour un niveau de confiance de 95%)* :	$\boxed{\Delta m = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \text{graduation}}$
Mesure obtenue avec un appareil de tolérance connue	
EX : Pipette jaugée, burette...	
→ Lorsque la mesure est obtenue avec un appareil pour lequel le constructeur indique la **tolérance t** (notée ± t), l'incertitude peut se calculer de la façon suivante *(pour un niveau de confiance de 95%)* :	$\boxed{\Delta m = \frac{2}{\sqrt{3}} \times t}$
Lecture sur un appareil numérique	
EX : ampèremètre, voltmètre, thermomètre numériques, balances...	
→ Pour un appareil numérique donnant une **précision p** de la mesure, on calcule l'incertitude à l'aide de la formule suivante *(pour un niveau de confiance de 95%)* : *La précision correspond généralement à un pourcentage de la mesure lue sur l'écran et à un certain nombre de digit.*	$\boxed{\Delta m = \frac{2}{\sqrt{3}} \times p}$
→ Pour un appareil numérique n'indiquant pas la précision p, on calcule l'incertitude à l'aide de la formule suivante *(pour un niveau de confiance de 95%)*	$\boxed{\Delta m = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \text{digit}}$

➤ Cas d'une mesure indirecte

▪ Pour une grandeur obtenue par calcul, l'incertitude se calcule à partir des incertitudes des grandeurs utilisées pour le calcul. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées en fonction du niveau de confiance choisi.

expression	incertitude
$y = x_1 + x_2$	$\Delta y^2 = \Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2$
$y = x_1 - x_2$	$\Delta y^2 = \Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2$
$y = x_1 \times x_2$	$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2$
$y = a.x + b$	$\Delta y = a.\Delta x$

➤ Evaluation d'une incertitude dans le cas de plusieurs sources d'erreurs

▪ Lors d'un mesurage, il peut y avoir plusieurs sources d'erreurs

↳ Si Δm_i est l'incertitude d'une source d'erreur, le calcul de l'incertitude Δm sur le mesurande M s'effectue à partir de la formule : $\boxed{\Delta m^2 = \sum \Delta m_i{}^2}$

➤ Comparaison avec une valeur de référence

▪ Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue précisément, considérée comme une valeur de référence x_{ref}. La qualité du résultat de la mesure x_{mes} est obtenue par un calcul de l'écart relatif (en %) donné par :

↳ Ecart relatif = $\boxed{\frac{|x_{ref} - x_{mes}|}{x_{ref}} \times 100}$

➤ Propositions pour améliorer le résultat

▪ *Incertitude du type A :*

Pour les TP, on peut considérer qu'une incertitude relative de l'ordre de 1 à 10% est raisonnable. Dans le cas contraire, on peut essayer d'améliorer ce résultats en éliminant les mesures qui s'écartent trop des autres valeurs (ou les refaire si c'est possible) avant de faire l'étude statistique.

▪ *Incertitude du type B* :

Lorsque la valeur référence est connue *(exemple dosage d'un vinaigre)*, la mesure devrait conduire à un écart relatif de l'ordre de 1 à 5%.
Dans tous les cas, si les résultats semblent déraisonnables, il faut faire une analyse des causes possibles de l'erreur ***(en utilisant la méthode des 5 M)***: