Effectuer une analyse dimensionnelle

1 Qu'est-ce qu'une analyse dimensionnelle ?

- Deux grandeurs A et B sont dites homogènes s'il existe un réel α tel que $A = \alpha B$.

  On dit alors que A et B ont même dimension (vocabulaire international, norme NF X 02-001).

  La dimension d'une grandeur X se note dim X, sauf pour les grandeurs de base que sont la longueur, la masse, le temps, l'intensité électrique, la quantité de matière et la température qui seront notées respectivement **L**, **M**, **T**, **I**, **N** et Θ.

- Effectuer **l'analyse dimensionnelle** d'une relation consiste à remplacer, dans cette relation, chaque lettre symbolisant une grandeur par la dimension de cette grandeur.

- Les dimensions des grandeurs respectent les règles de calcul suivantes :
  – la dimension d'une grandeur est obtenue à partir des relations entre les valeurs de ces grandeurs (scalaire) ;
  – les deux membres d'une égalité doivent avoir la même dimension ;
  – les deux membres d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension ; la dimension d'une somme ou d'une différence est celle de chacun de ses termes ;
  – la dimension d'un produit (respectivement d'un quotient) est le produit (respectivement le quotient) des dimensions ;
  – une grandeur qui est égale au quotient de deux grandeurs de même dimension n'a pas de dimension. Sa dimension est alors notée **1**.

Exemple

Effectuer l'analyse dimensionnelle de la grandeur énergie.

– Chercher une relation connue qui contient la grandeur énergie. → $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$

– Écrire la dimension de la grandeur masse m. → dim m = **M**

– Écrire la dimension de la grandeur vitesse v en utilisant la relation $v = \frac{\text{longueur}}{\text{durée}}$. → dim $v = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{T}} = \mathbf{LT^{-1}}$

– Comme $\frac{1}{2}$ est un nombre sans dimension, en appliquant les règles de calcul ci-dessus, la dimension obtenue de l'énergie est **dim $\mathscr{E}$ = $\mathbf{ML^2T^{-2}}$**. → dim $\mathscr{E}$ = dim $\mathscr{E}_c = \mathbf{M(LT^{-1})^2}$

2 Comment vérifier l'homogénéité d'une relation ?

Les deux membres d'une égalité ont même dimension. Ainsi, l'homogénéité d'une relation est vérifiée en cherchant la dimension de chaque membre de l'égalité.

Exemple

Montrer que la relation $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ est homogène.

(v est la célérité d'une onde sur l'eau, λ sa longueur d'onde et g l'intensité de la pesanteur).

– La dimension du membre de gauche est celle du quotient $\frac{\text{distance}}{\text{temps}}$. → dim $v = \mathbf{LT^{-1}}$

– Appliquer les règles de calcul. → dim $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\text{dim}\frac{g\lambda}{2\pi}}$

– 2π est un nombre sans dimension. → dim $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\text{dim}\, g\lambda}$

dim $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\text{dim}\, g}\ \sqrt{\text{dim}\, \lambda}$

– La dimension de λ est celle d'une longueur. La dimension de g est celle d'une divisée par celle d'une masse ou celle d'une longueur divisée par le carré force de la dimension d'une longueur. → dim λ = **L**, dim $g = \mathbf{LT^{-2}}$

– Les deux membres de l'égalité ont la même dimension, celle d'une vitesse. → dim $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\mathbf{LT^{-2}}}\ \sqrt{\mathbf{L}}$

dim $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \mathbf{LT^{-1}}$

La relation $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ est donc homogène.