Activité : Erreurs et incertitudes

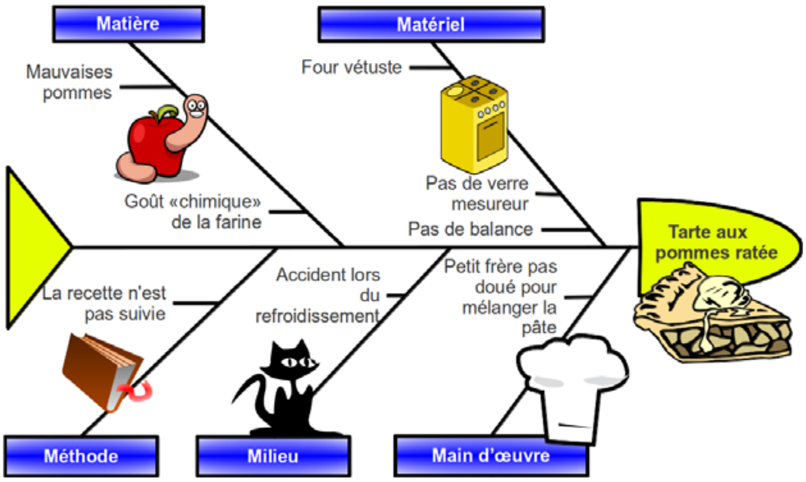
I. Vocabulaire

- La grandeur **M** que l'on veut mesurer est appelée le mesurande.
- On appelle mesurage l'action de mesurer, c'est à dire l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une valeur, notée **m**.
- La valeur vraie M_{vraie} est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait il ya toujours une erreur de mesure : Erreur = m - M_{vraie}

L'**erreur de mesure** est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie.
L'incertitude de mesure est une estimation de l'erreur de mesure.

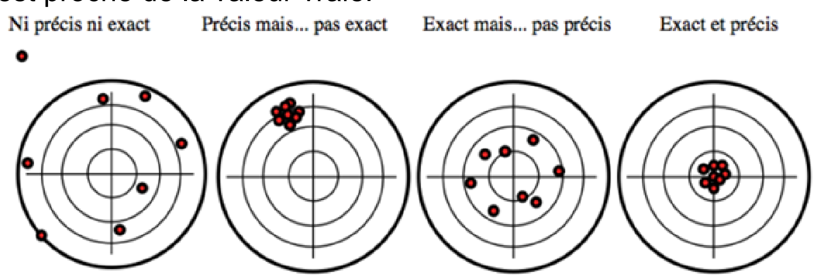
II. Comment recenser les erreurs de mesures ?

Réponse :
la méthode des 5 M



III. Précision et exactitude

La précision (ou la fidélité) d'un ensemble de mesures indique à quel point celles-ci sont proches les unes des autres. **L'exactitude** (ou la justesse) d'une série de mesures indique à quel point la moyenne des résultats de mesures est proche de la valeur vraie.



les erreurs aléatoires conduisent à un manque de précision.
les erreurs systématiques conduisent à un manque de justesse.

IV. Expression d'un résultat de mesurage

L'incertitude est notée u (uncertainty); incertitude type : u(M) ; incertitude élargie U(M).
Au lycée on considère que le niveau de confiance des incertitudes calculées est de 95 %.
C'est à dire que les formules utilisées pour le calcul des incertitudes nous permettent d'avoir 95% de chance de trouver la valeur VRAIE de la mesure dans notre intervalle de confiance.

Exemple : $\mathrm{T} = 25{,}3 \pm 0{,}4\ °\mathrm{C}$ (niveau de confiance 95%)

- La température vraie T_{vraie} a environ 95 % de chance d'être dans l'intervalle [24,9 °C ; 25,7 °C] ;
- 25,3 °C est la valeur mesurée ;
- 0,4 °C est l'incertitude notée U(T).

Ecriture du résultat de la mesure **M = m ± U(M)** unités
- on devra écrire U(M) avec 1 seul chiffre significatif (ou 2 dans certains cas), arrondi **par excès** ;
- on devra écrire m avec le même nombre de décimales que U(M) (même puissance de 10) et la même unité ;
- l'intervalle de confiance est [m – U(M) ; m + U(M)] ;

V. Comment évaluer la valeur mesurée et l'incertitude ?

1- Incertitude de type A = Incertitude statistique lors d'un grand nombre de mesures réalisées dans les mêmes conditions de répétabilité (même opérateur, même matériel, …).
Soient **n** mesures effectuées dans les mêmes conditions expérimentales dites conditions de répétabilité
- La valeur retenue comme valeur mesurée est la moyenne : $\overline{\mathrm{m}}$
- L'incertitude-type est telle que : $\mathrm{u(M)} = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}$ avec σ écart-type de l'échantillon de mesures
- Pour calculer σ on utilise la fonction "σ_{n-1}" ou "s" des calculatrices, écart d'un échantillon de mesures.

Une fois l'incertitude type u(M) de la grandeur M calculée, il faut calculer l'incertitude élargie U(M) : $\mathrm{U(M)} = \mathbf{k} \times \mathrm{u(M)}$ avec k = 2 pour un niveau de confiance de 95 % et un grand nombre de mesures.

si n < 20 alors utiliser le tableau pour la valeur de k:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20
k ; 95%	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,2	2,16	2,13	2,09

2- Incertitude de type B = incertitude liée aux appareils de mesures utilisés.
On réalise une seule mesure donc m est la valeur du résultat de mesure.

Cas usuels	Formule pour calculer l'incertitude-type
Appareil analogique (appareil à cadran, réglet, ...)	$\mathrm{u}_{\text{lecture}}(M) = \frac{\text{(1/2) x graduation}}{\sqrt{3}}$
Appareil numérique (voltmètre, ampèremètre,…)	$\mathrm{u}(M) = \frac{précision}{\sqrt{3}} = \frac{(\% \times \text{lecture} + \text{n} \times \text{digit})}{\sqrt{3}}$ Les valeurs de % et n sont données par le constructeur, le digit est la plus petite valeur affichable sur l'écran
Autre instrument (verrerie,...) avec la précision ou tolérance du constructeur	$\mathrm{u}_{\text{instrument}}(M) = \frac{\text{tolérance}}{\sqrt{3}}$

Une fois l'incertitude type u(M) de la grandeur M calculée, il faut calculer l'incertitude élargie U(M) : $\mathrm{U(M)} = \mathbf{k} \times \mathrm{u(M)}$ **avec k = 2** pour un niveau de confiance de 95 %.

VI. Incertitude relative et écart relatif

L'incertitude relative d'une mesure est le quotient de l'incertitude de mesure U par la valeur mesurée m soit $\frac{U(M)}{m}$. C'est la proportion de l'incertitude par rapport à la mesure. Elle s'exprime en %.
Plus L'incertitude relative est faible, plus on est précis.
Cette précision relative permet **de comparer "l'importance" (le poids**) d'une incertitude par rapport à une autre.

L'écart relatif se détermine si on connait la valeur de référence (valeur vraie) de la grandeur mesurée.

$E_r = \frac{\left|m_{mesurée} - m_{référence}\right|}{m_{référence}}$ il s'exprime en %.

Si l'écart relatif est faible, la mesure est alors plus juste et fidèle, il doit être <10%.

La valeur vraie doit-être contenue dans l'intervalle de confiance de l'incertitude [m – U(M) ; m + U(M)] cela permet de valider ou non la mesure et son protocole associé.

<u>VII-Tableau de synthèse (</u>Les formules seront données !)

<table>
<tr><td>Type d'évaluation</td><td>Etude statistique sur un grand nombre n de mesures
Incertitude de répétabilité
(Type A)</td><td colspan="2">Etude statistique impossible (une seule mesure)
Incertitude lié à l'appareil de mesure
(Type B)</td></tr>
<tr><td>Mesure m</td><td>Moyenne des valeurs mesurées :
m = m $_{moyenne}$</td><td colspan="2">Valeur mesurée
m = m_{lue}</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Incertitude type
u(M)</td><td rowspan="3">Calcul de l'écart-type σ
et
$u(M) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</td><td>Appareil à graduations</td><td>$u(M) = \frac{division/2}{\sqrt{3}} = \frac{division}{\sqrt{12}}$</td></tr>
<tr><td>Appareil numérique,</td><td>$u(M) = \frac{précision}{\sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td>verrerie</td><td>$u(M) = \frac{tolérance}{\sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td>Incertitude élargie U(M)
Avec un niveau de confiance de 95%</td><td>U(M) = k x u(M)

k varie selon le nombre de mesures (voir tableau) ; si n>20 alors k=2</td><td colspan="2">U(M) = 2x u(M)</td></tr>
<tr><td>Ecriture finale</td><td colspan="3">M = m ± U(M) ou m - U(M) < M < m + U(M)</td></tr>
<tr><td>Chiffres significatifs</td><td colspan="3">L'incertitude est déterminée avec 1 chiffre significatif arrondi en majorant
Le résultat de la mesure aura autant de décimales que l'incertitude.</td></tr>
<tr><td>Association d'incertitude pour une même grandeur</td><td colspan="3">$u(M) = \sqrt{u_1(M)^2 + u_2(M)^2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Composition d'incertitudes</td><td>$M = M_1 + M_2$ ou $M = M_1 - M_2$.</td><td colspan="2">$u(M) = \sqrt{u(M_1)^2 + u(M_2)^2}$</td></tr>
<tr><td>$M = M_1 \times M_2$ ou $M = \frac{M_1}{M_2}$.</td><td colspan="2">$u(M) = M \times \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M_1}\right)^2 + \left(\frac{u(M_2)}{M_2}\right)^2}$</td></tr>
<tr><td>$M = A \times M_1$ où A est un nombre exact.</td><td colspan="2">$u(M) = A \times u(M_1)$</td></tr>
</table>

pour incertitude de type A, si n < 20 alors utiliser le tableau pour la valeur de k:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20
k ; 95%	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,2	2,16	2,13	2,09

Incertitude relative $\frac{U(M)}{m}$. C'est la proportion de l'incertitude par rapport à la mesure. Elle s'exprime en %.

Cette précision relative permet **de comparer "l'importance"** d'une incertitude par rapport à une autre.

L'écart relatif se détermine si on connait la valeur de référence $E_r = \frac{|m_{mesurée} - m_{référence}|}{m_{référence}}$ il s'exprime en %.

La valeur vraie doit-être contenue dans l'intervalle de confiance de l'incertitude [m – U(M) ; m + U(M)] cela permet de valider ou non la mesure et son protocole associé.

Quelques applications

Exercice 1 : écriture d'un résultat

Anne mesure l'épaisseur **e** d'un fil à l'aide d'un palmer

Elle lit : 0,42 mm. Elle évalue l'incertitude U(e) grâce à un calcul donné par une formule .

Sa machine à calculer lui indique U(e) = 0,0964 mm

Ecrire le résultat de cette mesure en tenant compte de l'incertitude.

e = ...

Même question pour une mesure d'éclairement : E = 100,23465 lux avec U(E) = 0,208 lux

Même question pour une mesure de masse : m = 4,1 g avec U(m) = 0,0861 g

Même question pour une mesure de température : T = 47,8 °C avec U(T) = 0,468 °C

Même question pour une mesure de pression : p = 0,567 bar avec U(p) = 0,216 bar

Exercice 2 : Incertitudes de type B

Dans chacun des cas ci-dessous, exprimer correctement le résultat du mesurage pour un niveau de confiance de 95%.

Thermomètre gradué en °C

tolérance

Précision = 3% valeur lue+1 digit

Exercice 3 : Détermination de l'indice de réfraction de l'eau

Des élèves d'une classe de seconde mettent en place une expérience de réfraction dans le but de déterminer l'indice de réfraction de l'eau n_{eau}. Après plusieurs mesures d'angles d'incidence et de réfraction d'un faisceau laser passant de l'air dans l'eau, les binômes de la classe obtiennent les résultats suivants :

Binôme	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de n_{eau} obtenue	1,28	1,41	1,33	1,33	1,24	1,29	1,31	1,32	1,38

1. À l'aide des formules données précédemment, évaluer la valeur moyenne de l'indice de réfraction de l'eau.
2. Évaluer l'incertitude de répétabilité sur le résultat avec une confiance de 95%.
3. Présenter le résultat sous la forme : n_{eau} = valeur moyenne ± U(n_{eau})

Exercice 4 : Utilisation d'une fiole jaugée pour prélever un volume de liquide

Donnée : Tolérance de la verrerie en chimie

Fioles jaugées (classe A) :

V_{20}(mL)	25	50	100	200	250	500	1000
ΔV_{et}(mL)	0,060	0,060	0,10	0,15	0,15	0,25	0,40

Pipettes à deux traits (classe A) :

V_{20}(mL)	2	5	10	15	20	25	50	100
ΔV_{et}(mL)	0,010	0,015	0,020	0,020	0,030	0,030	0,050	0,080

1. Sur une fiole jaugée, on lit V = 100 mL (20°C)-classe A.

   Calculer l'incertitude-type constructeur $u(V)_{constructeur}$ sur le volume prélevé.
2. Le col de la fiole a un diamètre de 12 mm. On estime la tolérance de l'ajustage au trait de jauge à ± 1 mm.

   Calculer le volume V incertain. Calculer l'incertitude-type d'ajustage $u(V)_{ajustage}$.
3. Calculer l'incertitude finale composée u(V) sur le volume prélevé avec cette fiole à l'aide de la relation $u(V)^2 = u(V)^2_{constructeur} + u(V)^2_{ajustage}$.
4. Calculer enfin l'incertitude élargie U(V) et exprimer le volume V de la fiole à l'aide d'un encadrement.

<u>Exercice 5 :</u> Préparation d'une solution par dilution

Un élève a préparé 100,0 mL d'une solution S' d'hydroxyde de sodium à partir d'une solution d'hydroxyde de sodium à 0,100 ± 0,001 mol.L^{-1}.
Le volume de solution mère prélevé est Vo=10,0 mL.

Document n°1 : Matériel mis à disposition
- Solution S d'hydroxyde de sodium de concentration C = (0,100 ± 0,001) mol.L^{-1}.
- Pipette jaugée de 10,0 mL de classe A, deux traits.
- Fiole jaugée de 100,0 mL de classe A.

Document n°2 : Tolérance de verrerie en chimie (voir exercice précédent)

1. Exprimer la concentration C' de la solution fille.
2. Quelles sont les sources d'incertitude ?
3. Évaluer l'incertitude-type sur la concentration de la solution mère.
4. Évaluer l'incertitude-type sur le volume de solution mère prélevée.
5. Évaluer l'incertitude-type sur le volume de solution fille préparée.
6. Exprimer l'incertitude-type u(C') sur cette concentration C' à partir des trois précédentes.
7. Calculer enfin l'incertitude élargie U(C') et exprimer la concentration de la solution préparée à l'aide de la notation ±.

<u>Exercice 6 :</u>

Retrouver, les résultats obtenus dans les exercices 2, 3 et 4, à l'aide de GUM_MC.

Question pour l'exercice 3 et 4 : Quelle source d'erreur domine ?