

Erreurs et incertitudes au lycée général et technologique

Lord Kelvin écrivait « il n’y a de science que du mesurable... ». Mesurer des grandeurs identifiées est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l’industrie. Toute validation théorique d’un phénomène (physique, biologique, chimique, etc.) passe par la mesure fiable de ses effets. C’est aussi fondamental dans de nombreuses activités quotidiennes comme le pesage dans les commerces, les analyses biologiques, la mesure de vitesse avec un radar...

Toute mesure est entachée d’erreur, et l’incertitude permet d’estimer cette erreur, il est alors nécessaire d’établir la confiance dans les résultats fournis lors de ces opérations.

Mesurer une grandeur (intensité d’un courant, tension, longueur, ...), n’est donc pas simplement lui attribuer une valeur, mais aussi lui associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la qualité de la mesure.

I. Vocabulaire

- La **grandeur** que l’on veut mesurer est notée M , et toute grandeur physique est associée à une unité.
- Les **unités** sont issues du Système International d’unités (appelé SI) qui est fondé sur le système international de grandeurs, comportant les noms et symboles des unités, adoptés par la Conférence générale des poids et mesures (CGPM).

Le système International de grandeurs est fondé sur sept grandeurs de base, rassemblées dans le tableau suivant :

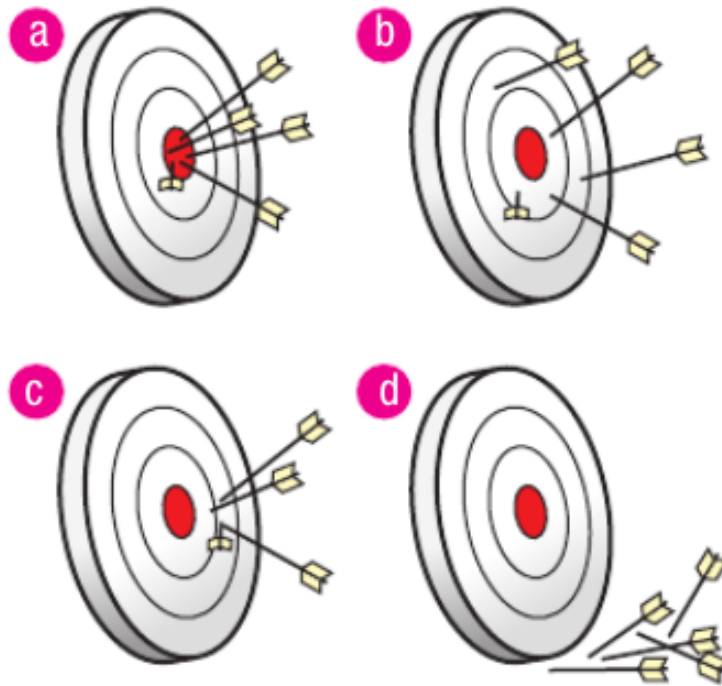
Grandeur	Longueur	Masse	Temps	Courant électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Unité	Mètre (m)	Kilogramme (kg)	Seconde (s)	Ampère (A)	Kelvin (K)	Mole (mol)	Candela (cd)

- Le **mesurage** est l’action de mesurer, c’est-à-dire l’ensemble des opérations permettant d’attribuer expérimentalement une valeur à une grandeur. Cette valeur est notée m .
- La **valeur vraie** de la grandeur est la valeur que l’on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n’étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.
- L’**erreur de mesure** est la différence entre la valeur mesurée et la valeur de référence. Si la valeur de référence est la valeur vraie de la grandeur, l’erreur est inconnue.
- L’**incertitude** est une estimation de l’erreur de mesure, elle est approchée au lycée par l’incertitude-type, exprimée sous la forme d’un écart-type, qui est notée **$u(m)$** .

II. Sources d'erreurs

Dans des mesurages répétés, on distingue 2 types d'erreurs :

- L'erreur systématique (demeure constante ou varie de façon prévisible).
- L'erreur aléatoire (qui varie de façon imprévisible).



▲ Erreurs aléatoires et systématiques.

- a** Impacts *tous proches du centre* : faibles erreurs aléatoires et faibles erreurs systématiques.
- b** Impacts *étalés mais centrés en moyenne* : fortes erreurs aléatoires et faibles erreurs systématiques.
- c** Impacts *groupés mais loin du centre* : faibles erreurs aléatoires et fortes erreurs systématiques.
- d** Impacts *étalés et loin du centre* : fortes erreurs aléatoires et fortes erreurs systématiques.

Extrait du livre de 1^{ère} STI 2D -DELAGRAVE – Programme 2019

III. Justesse et fidélité

La **justesse** d'un instrument de mesure est liée aux erreurs systématiques. Moins il y a d'erreurs systématiques, plus la mesure est juste.

La **fidélité** d'un instrument de mesure est liée aux erreurs aléatoires. Moins il y a d'erreurs aléatoires, plus la mesure est fidèle.

Dans le cas où il a été montré qu'une procédure (ou un appareil ou un système) de mesure est à la fois juste et fidèle, toute valeur mesurée obtenue sera alors exacte (aura une bonne exactitude) ; en effet, l'erreur de mesure n'est pas forcément nulle mais elle est faible, c'est-à-dire acceptable selon les critères choisis.

- **La justesse** d'une série de mesures indique à quel point la moyenne des résultats de mesurages est proche de la valeur de référence, qui peut être un étalon.

La justesse d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications exemptes d'erreurs systématiques.

- **La fidélité** d'une série de mesure d'une même grandeur, dans les mêmes conditions, indique à quel point celles-ci sont proches les unes des autres.

Lorsque les valeurs mesurées d'une même grandeur dans les mêmes conditions sont très proches les unes des autres, cela signifie qu'elles sont peu dispersées : la fidélité est grande.

Pour un même opérateur, utilisant le même équipement dans un intervalle de temps très court et la même procédure de mesure sur le même matériau à mesurer, le défaut de fidélité est quantifié par « **l'écart-type expérimental** », noté s ou σ_{n-1} (qui pourra être donnée par le logiciel ou la calculatrice en mode statistique).

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n m_k$$

IV. Comment recenser les erreurs de mesure ?

Méthode des « 5 M »

La méthode des « 5 M » permet de ne rien oublier lors de l'inventaire des sources d'erreurs.

- **MOYEN** : matériel utilisé (verrerie, appareils de mesure, etc.), substances chimiques et réactifs utilisés ;
- **MÉTHODE** : toutes les étapes de l'analyse (prélèvement, pesée, mise en solution, dilution, etc.) ;
- **MILIEU** : conditions environnementales (température, pression, hygrométrie...);
- **MATIÈRE** : produit analysé : produit biologique (plasma, urine, etc.), alimentaire (eau, lait, bière, etc.) ou autre pouvant contenir des substances responsables d'interférences lors de la mesure ;
- **MAIN D'ŒUVRE** : opérateur (technicien, etc.) effectuant la mesure.

Exemples :

Diagramme de « cause – effet » pour la mesure d'un volume V avec une pipette à deux traits.

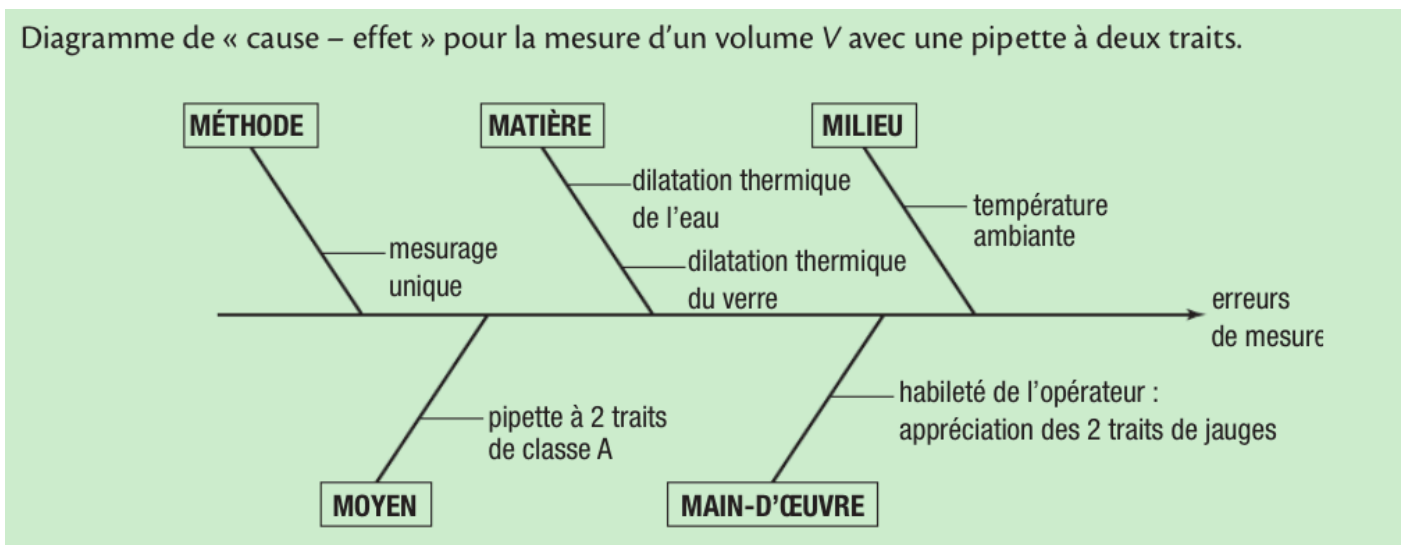
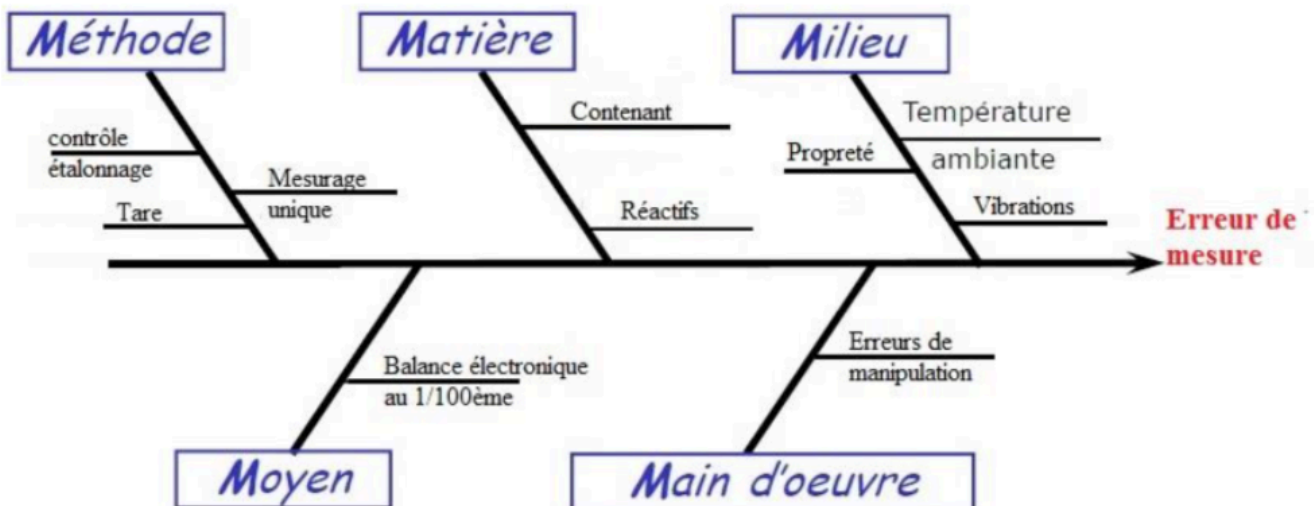


Diagramme cause – effet pour la mesure d'une masse avec une balance électronique



V. Expression d'un résultat de mesurage

Lors de conversions d'unités ou de passage d'unités à leurs multiples ou sous multiples, il faut veiller à la conservation du nombre de chiffres significatifs.

L'incertitude type est notée $u(m)$ (uncertainty) rend compte de l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur physique M .

Une vigilance particulière est portée sur la différence entre l'incertitude-type associée à la moyenne \bar{m} d'une "série de mesures" notée $u(\bar{m})$ et l'incertitude-type d'une mesure unique m notée $u(m)$. Cette différence de notation donne une indication sur la modalité d'obtention du mesurage.

- On devra écrire $u(m)$ ou $u(\bar{m})$ avec un seul chiffre significatif au lycée, arrondi par excès.
- On doit écrire m ou \bar{m} avec pour dernier chiffre significatif celui du même rang que $u(m)$ ou $u(\bar{m})$.
Exemple : $m = 12,5 \pm 0,2$ USI
- Le résultat de la mesure peut être présentée sous la forme d'un intervalle tel que :

$$\bar{m} - u(\bar{m}) \leq \bar{m} \leq \bar{m} + u(\bar{m}) \quad \text{ou} \quad m - u(m) \leq m \leq m + u(m)$$

Pour une série de mesure on écrira :

$$\bar{V} = 99,90 \text{ mL} \pm u(\bar{V}) ; \text{ avec } u(\bar{V}) = 0,08 \text{ mL}$$

Pour une mesure unique on écrira :

$$V = 99,90 \text{ mL} \pm u(V), \text{ avec } u(V) = 0,08 \text{ mL}$$

VI. Évaluer une incertitude par une approche statistique (type A)

Un même opérateur effectue n mesures de la même grandeur M dans les mêmes conditions de répétabilité (même opérateur, même matériel, ...), il obtient en général des résultats différents : m_1, m_2, m_3, \dots

On utilise des outils statistiques pour traiter l'ensemble des mesures réalisées.

- La valeur retenue comme valeur mesurée est la moyenne \bar{m} des valeurs m_k :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n m_k$$

- L'incertitude type est telle que : $u(\bar{m}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$, avec s écart-type expérimental de l'échantillon de mesures.
- Pour obtenir l'écart type expérimental, on utilise la fonction $\sigma n-1$ (calculatrice Casio) ou S_x (calculatrice TI).

Rappels mathématiques : L'écart type représente la dispersion des valeurs de la mesure par rapport à la moyenne.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}$$

Fiche méthode : utilisation du mode statistique de plusieurs calculatrices :

http://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp/IMG/pdf/mode_stat_calculatrices.pdf

VII. Évaluer une incertitude de type B

Elle est liée aux appareils de mesures utilisés.

On réalise une seule mesure, donc m est la valeur du résultat de mesure.

On peut distinguer plusieurs cas :

Le constructeur fournit l'incertitude-type $u(M)$	On utilise directement son incertitude
Appareil analogique (appareil à cadran, réglet, ...)	$u(m) = \frac{\text{valeur d'une division}}{\sqrt{12}}$
Appareil numérique (voltmètre, ampèremètre, ...)	$u(m) = \frac{\text{tolérance}}{\sqrt{3}} = \frac{\% \times \text{lecture} + n \times \text{digit}}{\sqrt{3}}$ <p>Les valeurs de % et n sont données par le constructeur, le digit est la plus petite valeur affichable sur l'écran.</p>
Verrerie avec la précision ou tolérance du constructeur.	$u(m) = \frac{\text{valeur d'une division ou tolérance}}{\sqrt{3}}$

VIII. Évaluer une incertitude-type composée

Lorsque la grandeur M que l'on évalue est le résultat d'un calcul où interviennent plusieurs mesures, on peut évaluer l'incertitude-type $u(m)$ des manières suivantes :

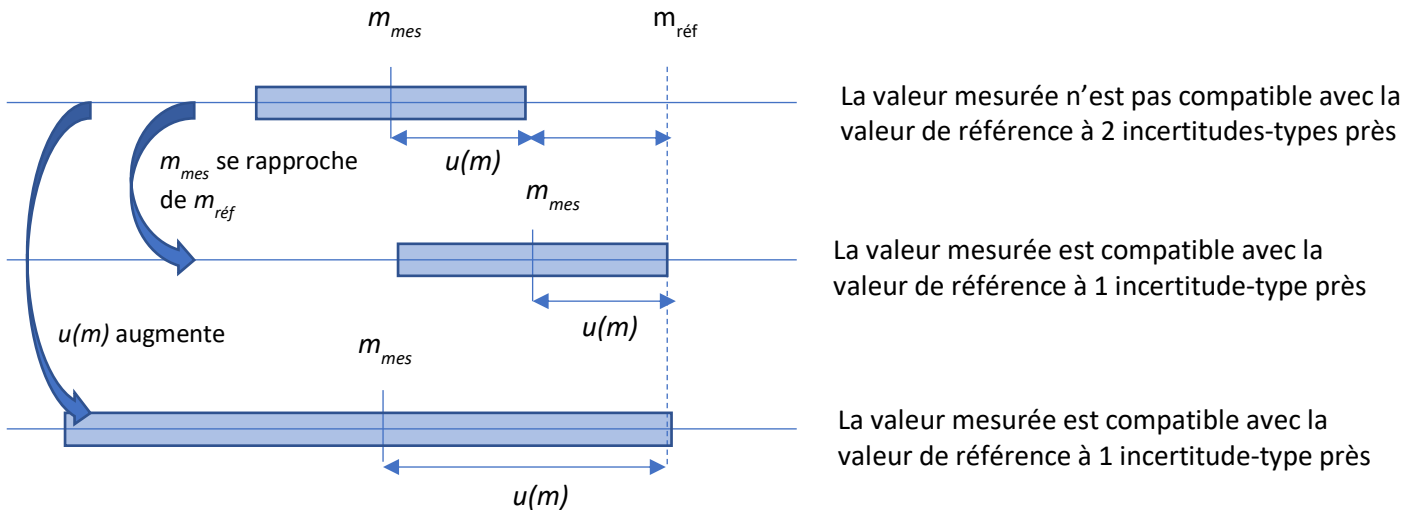
$M = M_1 + M_2$ ou $M = M_1 - M_2$	$u(m) = \sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}$
$M = M_1 \times M_2$ ou $M = \frac{M_1}{M_2}$	$u(m) = m \times \sqrt{\left[\frac{u(m_1)}{M_1}\right]^2 + \left[\frac{u(m_2)}{M_2}\right]^2}$
$M = A \times M_1$ où A est un nombre exact	$u(m) = A \times u(m_1)$

IX. Comparer la valeur de la mesure expérimentale avec une valeur de référence.

Comparaison qualitative

La compatibilité ou la non compatibilité entre une valeur expérimentale mesurée et une valeur de référence dépend de **l'écart entre ces deux valeurs** ainsi que de **l'incertitude-type**, qui fournit **une estimation de l'étendue des valeurs** que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur physique mesurée.

Cet écart peut être évalué en nombre d'incertitudes-types.



Comparaison quantitative

Le calcul de l'écart relatif n'est plus d'actualité

$$\frac{|m_{mes} - m_{ref}|}{u(m)}$$

- Si l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est du même ordre que l'incertitude-type, alors la mesure est compatible avec la valeur de référence.
- Si la valeur du rapport est supérieure à 1, alors la mesure n'est pas compatible avec la valeur de référence : il faut alors analyser les sources d'erreurs (méthode des 5M) pour être capable de modifier le protocole expérimental ou l'instrument de mesure en conséquence.

Progressivité des capacités exigibles Mesure et incertitudes

De la seconde à la spécialité PC terminale générale

Notions et contenus	Capacités exigibles	Niveau de classe
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type.	Seconde
	Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole.	Seconde
	Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes	Seconde
	Capacité numérique : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.	Seconde
	Capacité numérique : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur ou d'un langage de programmation	Terminale
Incertitudes-types	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.	Seconde
	Définir qualitativement une incertitude-type.	Première
	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).	Première
	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche statistique (évaluation de type B).	Première
	Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude de type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs dont les incertitudes-types associées sont connues.	Terminale
	Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées.	Terminale
Écriture du résultat	Écrire avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.	Seconde
Valeur de référence	Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence	Seconde
	Comparer, le cas échéant, le résultat d'une mesure m_{mes} à une valeur de référence m_{ref} en utilisant le quotient $\left \frac{m_{mes} - m_{ref}}{u(m)} \right $ où $u(m)$ est l'incertitude-type associée au résultat	Terminale

De la seconde à la Première ST2S

(Aucune nouvelle compétence en première)

Notions et contenus	Capacités exigibles	Niveau de classe
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type.	Seconde
	Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole.	Seconde
	Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes	Seconde
	Capacité numérique : Représenter l'historgramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.	Seconde
Dispersion des mesures Incertitudes-types	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.	Seconde
Écriture du résultat	Écrire avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.	Seconde
Valeur de référence	Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence	Seconde

De la seconde à la terminale STI2D

Notions et contenus	Capacités exigibles	Niveau de classe
Grandeurs et unités. Système International d'unités	Distinguer les notions de grandeur, valeur et unité.	Première
	Citer les sept unités de base du système international	Première
Sources d'erreurs	Identifier les principales sources d'erreurs lors d'une mesure	Première
	Faire des propositions pour améliorer un protocole de mesure.	Terminale
	Comparer le poids des différentes sources d'erreur, à partir de l'incertitude-type associée à chacune d'elles.	Terminale
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type.	Seconde
	Exploiter des séries de mesures indépendantes (histogramme, moyenne et écart-type) pour comparer plusieurs méthodes de mesure d'une grandeur physique, en termes de justesse et de fidélité.	Première
	Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole.	Seconde
	Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes	Seconde
	Capacité numérique : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.	Seconde
Incertitudes-types	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.	Seconde
	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).	Première
	Estimer une incertitude-type sur une mesure unique	Première
	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type associée à une mesure unique en exploitant une relation fournie.	Terminale
	Capacité numérique : Utiliser un outil numérique pour évaluer l'incertitude-type composée associée à une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs incertitudes	Terminale
Écriture du résultat	Écrire avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.	Seconde
	Exprimer un résultat de mesure avec le nombre de chiffres significatifs adaptés et l'incertitude-type associée et en indiquant l'unité correspondante.	Première
	Arrondir un résultat d'une mesure en cohérence avec l'incertitude associée	Terminale
Valeur de référence	Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence	Seconde
	Discuter de la validité d'un résultat en comparant la différence entre le résultat d'une mesure d'une part et l'incertitude-type d'autre part.	Première
	Évaluer le nombre d'incertitudes-types séparant le résultat d'une mesure de la valeur de référence	Terminale
	Discuter selon le contexte de la validité d'un résultat de mesure en fonction du nombre d'incertitudes-types le séparant d'une valeur de référence	Terminale

De la seconde à la terminale STL

Notions et contenus	Capacités exigibles	Niveau de classe
Sources d'erreurs	Identifier qualitativement les principales sources d'erreurs lors d'une mesure	Première
	Proposer des améliorations dans un protocole afin de diminuer l'incertitude sur la mesure.	Terminale
	Comparer le poids des différentes sources d'erreur, à l'aide d'une méthode fournie	Terminale
	Identifier le matériel adapté à la précision attendue.	Terminale
	Proposer des améliorations dans un protocole afin de diminuer l'incertitude sur la mesure.	Terminale
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type.	Seconde
	Exploiter des séries de mesures indépendantes (histogramme, moyenne et écart-type) pour comparer plusieurs méthodes de mesure d'une grandeur physique, en termes de justesse et de fidélité.	Première
	Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole.	Seconde
	Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes	Seconde
	Capacité numérique : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.	Seconde
	Capacité numérique : A l'aide d'un tableur ou d'un programme informatique : <ul style="list-style-type: none"> - Traiter des données expérimentales ; - Représenter les histogrammes associés à des séries de mesures 	Première
Incertitudes-types	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.	Seconde
	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).	Première
	Procéder à une évaluation de type B d'une incertitude-type pour une source d'erreur en exploitant une relation fournie et/ou les notices constructeurs.	Première
	Évaluer, à l'aide d'une relation fournie ou d'un logiciel, l'incertitude-type d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs sources d'erreurs.	Terminale
	Capacité numérique : A l'aide d'un tableur, d'un logiciel ou d'un programme informatique : <i>Évaluer l'incertitude-type finale d'une mesure.</i>	Terminale
Écriture du résultat	Écrire avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.	Seconde
	Exprimer un résultat de mesure avec le nombre de chiffres significatifs adaptés et l'incertitude-type associée	Première
Valeur de référence	Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence	Seconde
	Discuter de la validité d'un résultat en comparant la différence entre le résultat d'une mesure d'une part et l'incertitude-type d'autre part.	Première