

Erreurs et incertitudes au lycée général et technologique

Lord Kelvin écrivait « il n’y a de science que du mesurable... ». Mesurer des grandeurs identifiées est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l’industrie. Toute validation théorique d’un phénomène (physique, biologique, chimique, etc.) passe par la mesure fiable de ses effets. C’est aussi fondamental dans de nombreuses activités quotidiennes comme le pesage dans les commerces, les analyses biologiques, la mesure de vitesse avec un radar...

Toute mesure est entachée d’erreur, et l’incertitude permet d’estimer cette erreur, il est alors nécessaire d’établir la confiance dans les résultats fournis lors de ces opérations.

Mesurer une grandeur (intensité d’un courant, tension, longueur, ...), n’est donc pas simplement lui attribuer une valeur, mais aussi lui associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la qualité de la mesure.

I. Vocabulaire

- La **grandeur** que l’on veut mesurer est notée M, « mesurande », et toute grandeur physique est associée à une unité.
- Les **unités** sont issues du Système International d’unités (appelé SI) qui est fondé sur le système international de grandeurs, comportant les noms et symboles des unités, adoptés par la Conférence générale des poids et mesures (CGPM).

Le système International de grandeurs est fondé sur sept grandeurs de base, rassemblées dans le tableau suivant :

Grandeur	Longueur	Masse	Temps	Courant électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Unité	Mètre (m)	Kilogramme (kg)	Seconde (s)	Ampère (A)	Kelvin (K)	Mole (mol)	Candela (cd)

- Le **mesurage** est l’action de mesurer, c’est-à-dire l’ensemble des opérations permettant d’attribuer expérimentalement une valeur à une grandeur. Cette valeur est notée m.
- La **valeur vraie** de la grandeur est la valeur que l’on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n’étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.
- L’**erreur de mesure** est la différence entre la valeur mesurée et la valeur de référence. Si la valeur de référence est la valeur vraie de la grandeur, l’erreur est inconnue.
- L’**incertitude** est une estimation de l’erreur de mesure, elle est approchée au lycée par l’incertitude-type, exprimée sous la forme d’un écart-type, qui est notée **u(m)**.

Exercices d'application :

1. Vocabulaire

On mesure avec un chronomètre la durée $t = (50,256 \pm 0,005) \text{ s}$.

a) Quelle est l'unité de cette valeur ?

.....

b) Quel est le mesurande ?

.....

c) Que vaut l'incertitude de mesure ?

.....

d) Quel est le nombre de chiffres significatifs de cette mesure ?

.....

2. Système international – Grandeurs physiques et unités

Parmi les grandeurs suivantes, indiquer celles qui appartiennent aux grandeurs de base du système international :

la vitesse – la puissance –
le courant électrique – la température.

Parmi les unités suivantes, indiquer celles qui appartiennent aux unités de base du système international :

la mole – le hertz – le mètre – le joule.

Exprimer les unités des trois grandeurs suivantes en fonction des unités de base du SI :

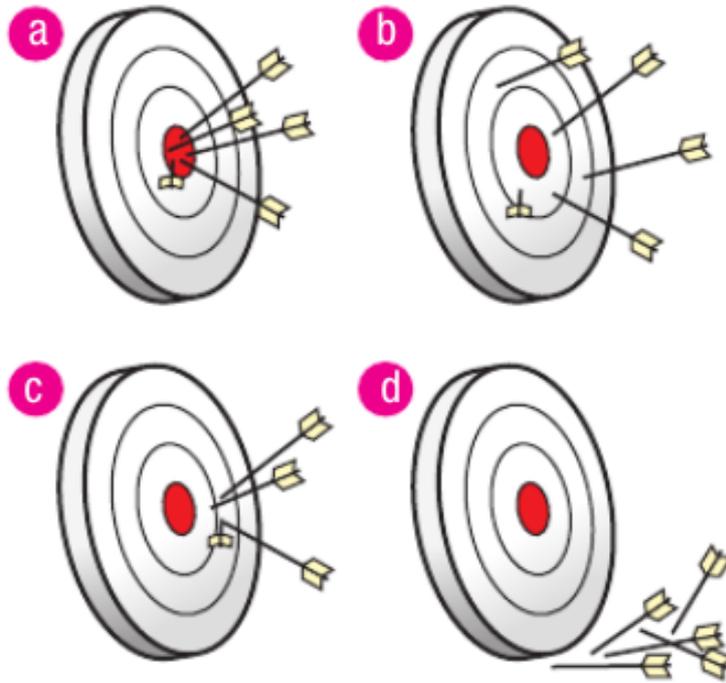
tension – puissance – débit volumique.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

II. Sources d'erreurs

Dans des mesurages répétés, on distingue 2 types d'erreurs :

- L'erreur systématique (demeure constante ou varie de façon prévisible).
- L'erreur aléatoire (qui varie de façon imprévisible).



▲ Erreurs aléatoires et systématiques.

- a** Impacts *tous proches du centre* : faibles erreurs aléatoires et faibles erreurs systématiques.
- b** Impacts *étalés mais centrés en moyenne* : fortes erreurs aléatoires et faibles erreurs systématiques.
- c** Impacts *groupés mais loin du centre* : faibles erreurs aléatoires et fortes erreurs systématiques.
- d** Impacts *étalés et loin du centre* : fortes erreurs aléatoires et fortes erreurs systématiques.

Extrait du livre de 1^{ère} STI 2D -DELAGRAVE – Programme 2019

III. Comment recenser les erreurs de mesure ?

Méthode des « 5 M »

La méthode des « 5 M » permet de ne rien oublier lors de l'inventaire des sources d'erreurs.

- **MOYEN** : matériel utilisé (verrerie, appareils de mesure, etc.), substances chimiques et réactifs utilisés ;
- **MÉTHODE** : toutes les étapes de l'analyse (prélèvement, pesée, mise en solution, dilution, etc.) ;
- **MILIEU** : conditions environnementales (température, pression, hygrométrie...);
- **MATIÈRE** : produit analysé : produit biologique (plasma, urine, etc.), alimentaire (eau, lait, bière, etc.) ou autre pouvant contenir des substances responsables d'interférences lors de la mesure ;
- **MAIN D'OEUVRE** : opérateur (technicien, etc.) effectuant la mesure.

Exemples :

Diagramme de « cause – effet » pour la mesure d'un volume V avec une pipette à deux traits.

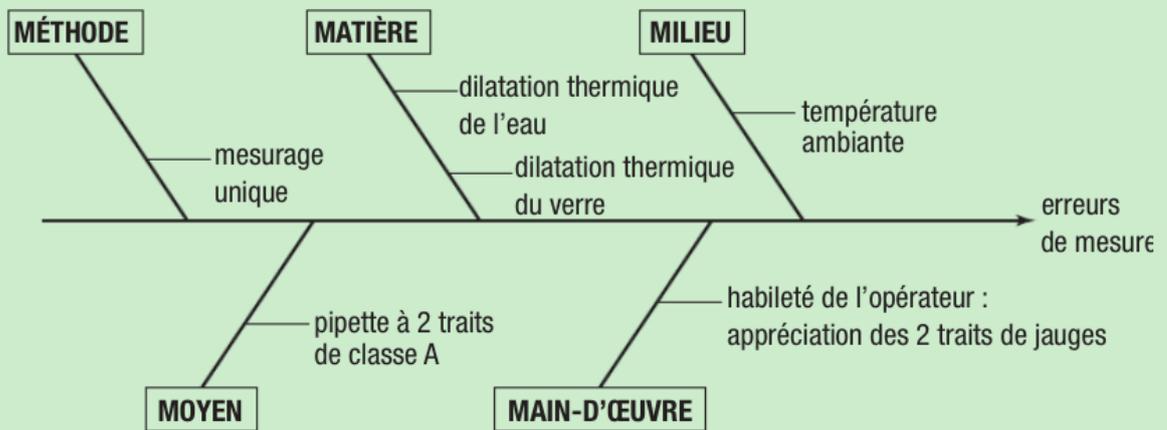
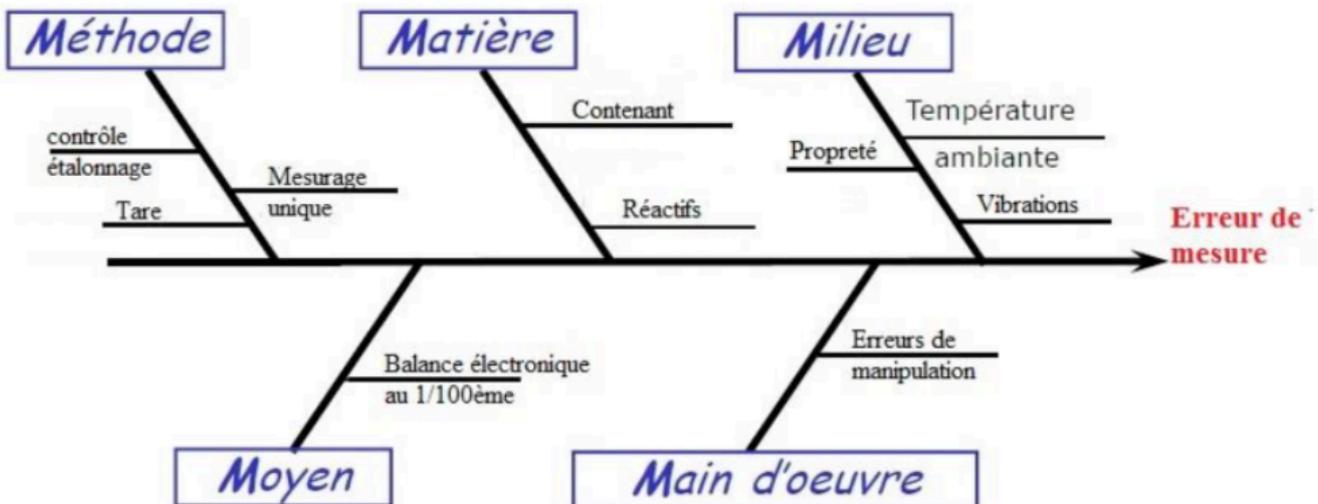


Diagramme cause – effet pour la mesure d'une masse avec une balance électronique



Extrait du livre de 1^{ère} STI 2D -DELAGRAVE – Programme 2019

Exercices d'application :

1. Mesure d'une tension

On mesure une tension à l'aide d'un voltmètre.

Citer deux sources d'erreurs possibles et indiquer à quel type elles correspondent.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Mesure d'une distance

Pour mesurer la distance entre deux murs, on utilise un télémètre laser.

L'opérateur répète trois fois la mesure en déplaçant le télémètre. Il obtient les valeurs suivantes :

4,698 m – 4,696 m – 4,699 m

Quelles sources d'erreurs peuvent intervenir lors de cette mesure ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Type d'erreur

Parmi les situations suivantes, préciser le type d'erreur.

Une variation de la température extérieure qui influe sur le mesurage.

.....

Un instrument de mesure mal calibré

.....

Une perturbation due au branchement de l'instrument de mesure

.....

Le temps de réaction de l'opérateur

.....

IV. Justesse et fidélité

La **justesse** d'un instrument de mesure est liée aux erreurs systématiques. Moins il y a d'erreurs systématiques, plus la mesure est juste.

La **fidélité** d'un instrument de mesure est liée aux erreurs aléatoires. Moins il y a d'erreurs aléatoires, plus la mesure est fidèle.

Dans le cas où il a été montré qu'une procédure (ou un appareil ou un système) de mesure est à la fois juste et fidèle, toute valeur mesurée obtenue sera alors exacte (aura une bonne exactitude) ; en effet, l'erreur de mesure n'est pas forcément nulle mais elle est faible, c'est-à-dire acceptable selon les critères choisis.

- **La justesse** d'une série de mesures indique à quel point la moyenne des résultats de mesurages est proche de la valeur de référence, qui peut être un étalon.

La justesse d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications exemptes d'erreurs systématiques.

La quantification du défaut de justesse est le **biais** (ou erreur de justesse) : $\text{Biais} = \bar{m} - m_{\text{référence}}$

Remarque : Le biais a un signe, il faut l'indiquer.

- **La fidélité** d'une série de mesure d'une même grandeur, dans les mêmes conditions, indique à quel point celles-ci sont proches les unes des autres.

Lorsque les valeurs mesurées d'une même grandeur dans les mêmes conditions sont très proches les unes des autres, cela signifie qu'elles sont peu dispersées : la fidélité est grande.

Pour un même opérateur, utilisant le même équipement dans un intervalle de temps très court et la même procédure de mesure sur le même matériau à mesurer, le défaut de fidélité est quantifié par « **l'écart-type expérimental** », noté s ou σ_{n-1} (qui pourra être donnée par le logiciel ou la calculatrice en mode statistique).

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n m_k$$

Exercices d'application :

1. Cinémomètre juste et fidèle

On a réalisé une série de cinq mesures indépendantes de vitesse à l'aide de deux cinémomètres :

Numéro de la mesure (n°)	1	2	3	4	5
Cinémomètre n° 1 : vitesse (m.s ⁻¹)	24,7	23,3	23,2	24,8	24,0
Cinémomètre n° 2 : vitesse (m.s ⁻¹)	25,3	25,4	25,4	25,4	25,3

Identifier le cinémomètre qui est le plus fidèle.

.....

La valeur vraie de cette vitesse est connue et vaut 24,0 m.s⁻¹. Identifier le cinémomètre qui est le plus juste.

.....

2. Mesure à l'aide d'un luxmètre

On utilise un luxmètre pour mesurer l'éclairement d'une source de lumière à LED alimentée par un courant d'intensité 35 mA. La distance séparant le luxmètre et la LED est de 0,50 m.



On obtient la série de mesures suivantes relevée toutes les 30 min.

Numéro de la mesure (n°)	1	2	3	4
Éclairement (lux)	154	160	165	170

Indiquer quelle peut être la cause de l'augmentation de la valeur mesurée

.....

3. Précision d'un thermomètre

La température d'un corps a été mesurée avec deux thermomètres. On obtient les résultats de mesure suivants :

- $\theta_1 = 45,4 \pm 0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$;
- $\theta_2 = 45,2 \pm 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Quel est le thermomètre le plus précis ?

.....

4. Fidélité et justesse d'une balance de précision



Voici les caractéristiques d'une balance.

- **Portée max** : 220 g
- **Portée mini** : 0,02 g
- **Résolution** : 0,1 mg
- **Écart maximal toléré** : 1 mg

Pour qu'une balance soit homologuée, il faut que la fidélité et le biais soient inférieurs à l'écart maximal toléré.

1. Fidélité d'une balance

On réalise successivement 6 mesures d'une masse étalon de valeur nominale 50,0000 g.

Mesure N°	1	2	3
Valeurs (g)	50,0000	49,9997	49,9996
Mesure N°	4	5	6
Valeurs (g)	50,0004	50,0001	49,9999

Déterminer avec votre calculatrice l'écart-type, et comparer cette valeur à l'écart maximal toléré.
Conclure.

.....
.....
.....
.....

V. Expression d'un résultat de mesurage

Lors de conversions d'unités ou de passage d'unités à leurs multiples ou sous multiples, il faut veiller à la conservation du nombre de chiffres significatifs.

L'incertitude type est notée $u(m)$ (uncertainty) rend compte de l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur physique M .

Une vigilance particulière est portée sur la différence entre l'incertitude-type associée à la moyenne \bar{m} d'une "série de mesures" notée $u(\bar{m})$ et l'incertitude-type d'une mesure unique m notée $u(m)$. Cette différence de notation donne une indication sur la modalité d'obtention du mesurage.

- On devra écrire $u(m)$ ou $u(\bar{m})$ avec un seul chiffre significatif au lycée, arrondi par excès.
- On doit écrire m ou \bar{m} avec pour dernier chiffre significatif celui du même rang que $u(m)$ ou $u(\bar{m})$.
Exemple : $m = 12,5 \pm 0,2$ USI
- Le résultat de la mesure peut être présentée sous la forme d'un intervalle tel que :

$$\bar{m} - u(\bar{m}) \leq \bar{m} \leq \bar{m} + u(\bar{m}) \quad \text{ou} \quad m - u(m) \leq m \leq m + u(m)$$

Pour une série de mesure on écrira :

$$\bar{V} = 99,90 \text{ mL} \pm u(\bar{V}) ; \text{ avec } u(\bar{V}) = 0,08 \text{ mL}$$

Pour une mesure unique on écrira :

$$V = 99,90 \text{ mL} \pm u(V), \text{ avec } u(V) = 0,08 \text{ mL}$$

Exercices d'application :

1. Écriture d'un mesurage

Rectifier, si nécessaire, l'écriture des mesurages suivants :

- $V = (100,0 \pm 0,5) \text{ mL}$

.....

- $t = (60,00 \pm 0,4) \text{ s}$

.....

- $m = (3,56 \pm 0,0584) \text{ g}$

.....

- $l = (10 \pm 0,5) \text{ cm}$

2. Écriture d'un mesurage (bis)

Écrire correctement le résultat des mesurages suivants (on suppose une unique source d'erreurs pour chaque mesure).

a) Avec une règle, on mesure $l = 90,5 \text{ cm}$. L'incertitude-type de lecture vaut $u_{\text{lect}} = 1 \text{ cm}$

.....

b) Avec une balance, on mesure $m = 0,896 \text{ g}$. L'incertitude-type de résolution vaut $u_{\text{res}} = 0,02 \text{ g}$

.....

c) On mesure une tension $U = 12,05 \text{ V}$. L'incertitude-type de précision vaut $u_{\text{prec}} = 0,1 \text{ V}$.

VI. Évaluer une incertitude par une approche statistique (type A)

Un même opérateur effectue n mesures de la même grandeur M dans les mêmes conditions de répétabilité (même opérateur, même matériel, ...), il obtient en général des résultats différents : m_1, m_2, m_3, \dots

On utilise des outils statistiques pour traiter l'ensemble des mesures réalisées.

- La valeur retenue comme valeur mesurée est la moyenne \bar{m} des valeurs m_k :

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n m_k$$

- L'incertitude type est telle que : $u(\bar{m}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$, avec s écart-type expérimental de l'échantillon de mesures.
- Pour obtenir l'écart type expérimental, on utilise la fonction $\sigma n-1$ (calculatrice Casio) ou S_x (calculatrice TI).

Rappels mathématiques : L'écart type représente la dispersion des valeurs de la mesure par rapport à la moyenne.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}$$

Fiche méthode : utilisation du mode statistique de plusieurs calculatrices :

http://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp/IMG/pdf/mode_stat_calculatrices.pdf

Exercices d'application :

On a réalisé une série de cinq mesures indépendantes de vitesse à l'aide de deux cinémomètres :

Numéro de la mesure (n°)	1	2	3	4	5
Cinémomètre n° 1 : vitesse ($m.s^{-1}$)	24,7	23,3	23,2	24,8	24,0
Cinémomètre n° 2 : vitesse ($m.s^{-1}$)	25,3	25,4	25,4	25,4	25,3

Déterminer pour les deux séries de mesures :

- La valeur moyenne :

.....

.....

.....

.....

.....

- L'incertitude-type :

.....

.....

.....

.....

Écrire les deux résultats de mesure de la vitesse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VII. Évaluer une incertitude de type B

Elle est liée aux appareils de mesures utilisés.

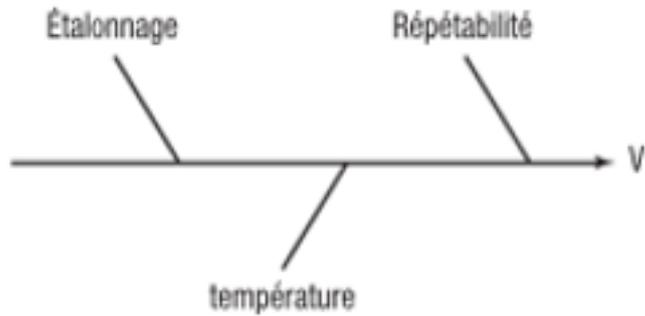
On réalise une seule mesure, donc m est la valeur du résultat de mesure.

On peut distinguer plusieurs cas :

Le constructeur fournit l'incertitude-type $u(M)$	On utilise directement son incertitude
Appareil analogique (appareil à cadran, réglet, ...)	$u(m) = \frac{\text{valeur d'une division}}{\sqrt{12}}$
Appareil numérique (voltmètre, ampèremètre, ...)	$u(m) = \frac{\text{tolérance}}{\sqrt{3}} = \frac{\% \times \text{lecture} + n \times \text{digit}}{\sqrt{3}}$ <p>Les valeurs de % et n sont données par le constructeur, le digit est la plus petite valeur affichable sur l'écran.</p>
Verrerie avec la précision ou tolérance du constructeur.	$u(m) = \frac{\text{valeur d'une division ou tolérance}}{\sqrt{3}}$

Exercices d'application :

Le diagramme « cause-effet » d'une pipette jaugée permet d'identifier les sources d'erreurs pour la mesure d'un volume.



a) Quelles sont les sources d'erreurs lors de l'utilisation d'une pipette jaugée ? Quelles informations sur la pipette jaugée permettent d'en quantifier deux ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

b) Calculer l'incertitude-type d'étalonnage $u_{ét}(V)$.

.....
.....
.....
.....

- c) L'incertitude-type u_{temp} (V) due à la variation de la température donnée par la relation :
 $u_{\text{temp}} (V) = 1,2 \times 10^{-4} \times V \times \Delta\theta$ où $\Delta\theta$ est la variation de la température autour de la valeur 20°C.
 Calculer u_{temp} (V) lorsqu'on manipule dans un laboratoire dont la température ambiante est de 22°C.

.....

.....

.....

.....

- d) L'incertitude-type de répétabilité $u_{\text{rép}}$ (V) est quantifiée en faisant une évaluation de type A. Le tableau ci-dessous rassemble les pesées de 10 prélèvements d'eau avec la pipette jaugée.

Essai N°	1	2	3	4	5
Masse (g)	25,02	25,04	25,06	24,99	25,00
Essai N°	6	7	8	9	10
Masse (g)	24,97	25,02	25,00	24,95	25,01

Calculer $u_{\text{rép}}$ (V)

.....

.....

.....

.....

.....

Quelle est la source d'incertitude la plus importante lors de l'utilisation d'une pipette jaugée ?

.....

.....

.....

VIII. Évaluer une incertitude-type composée

Lorsque la grandeur M que l'on évalue est le résultat d'un calcul où interviennent plusieurs mesures, on peut évaluer l'incertitude-type $u(m)$ des manières suivantes :

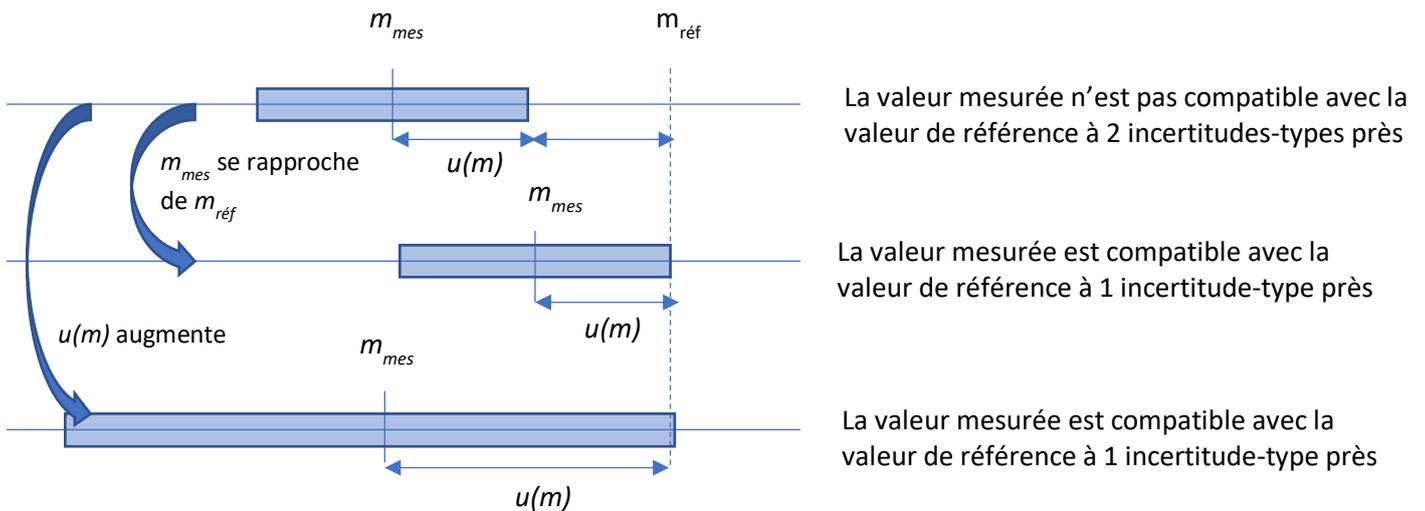
$M = M_1 + M_2$ ou $M = M_1 - M_2$	$u(m) = \sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}$
$M = M_1 \times M_2$ ou $M = \frac{M_1}{M_2}$	$u(m) = m \times \sqrt{\left[\frac{u(m_1)}{M_1}\right]^2 + \left[\frac{u(m_2)}{M_2}\right]^2}$
$M = A \times M_1$ où A est un nombre exact	$u(m) = A \times u(m_1)$

IX. Comparer la valeur de la mesure expérimentale avec une valeur de référence.

Comparaison qualitative

La compatibilité ou la non compatibilité entre une valeur expérimentale mesurée et une valeur de référence dépend de l'écart entre ces deux valeurs ainsi que de l'incertitude-type, qui fournit une estimation de l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur physique mesurée.

Cet écart peut être évalué en nombre d'incertitudes-types.



Comparaison quantitative

Le calcul de l'écart relatif n'est plus d'actualité

$$\frac{|m_{mes} - m_{ref}|}{u(m)}$$

- Si l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est du même ordre que l'incertitude-type, alors la mesure est compatible avec la valeur de référence.
- Si la valeur du rapport est supérieure à 2, alors la mesure n'est pas compatible avec la valeur de référence : il faut alors analyser les sources d'erreurs (méthode des 5M) pour être capable de modifier le protocole expérimental ou l'instrument de mesure en conséquence.

