Chapitre 18 : Gaz parfait et bilan d'énergie d'un système

Feuille d'évaluation à rendre obligatoirement avec la copie

Correction activité exercices n°18.7 :

Résoudre une équation différentielle

1. Pour une équation différentielle de la forme :
$y' = ay + b$, les solutions sont de la forme : $y = K \times e^{a \times x} - \frac{b}{a}$.
Par comparaison, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme : $\theta = K \times e^{a \times t} + \theta_e$.
D'après les conditions initiales : $\theta(0) = K + \theta_e = \theta_i$
donc $K = \theta_i - \theta_e$.
L'unique solution de l'équation différentielle vérifiée par la température θ est : $\theta = (\theta_i - \theta_e) \times e^{a \times t} + \theta_e$.

2. Au bout d'une heure, la température du gâteau est :
$\theta = (180\ °C - 20\ °C) \times e^{-3{,}8 \times 10^{-4}\ s^{-1} \times 3600\ s} + 20\ °C = 61 °C$.

1. D'après le premier principe de la thermodynamique, entre deux états i et f, $\Delta U_{i \to f} = W + Q$ donc $\Delta U_{i \to f} = Q$.
De plus, pour un système incompressible : $\Delta U_{i \to f} = m \times c \times \Delta\theta$.
L'expression de la relation $\Delta U_{i \to f} = Q$ devient donc : $Q = m \times c \times \Delta\theta$.
$Q = m \times c \times \Delta\theta$ peut s'écrire, en utilisant la loi de Newton :
$m \times c \times \Delta\theta = h \times S \times (\theta_e - \theta) \times \Delta t$ soit $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{h \times S}{m \times c} \times (\theta_e - \theta)$.
Lorsque Δt tend vers zéro, la limite de $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est égale à la dérivée de θ par rapport au temps t notée $\frac{d\theta}{dt}$.
Soit $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{h \times S}{m \times c} \times \theta + \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta_e$; c'est l'équation différentielle vérifiée par θ pour chacun des transferts thermiques.

2. a. Pour une équation différentielle de la forme $y' = a \times y + b$.
Les solutions sont de la forme : $y = K \times e^{a \times x} - \frac{b}{a}$.
Par comparaison, les solutions de l'équation différentielle sont :
$\theta = K \times e^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t} + \theta_e$.
Dans le cas de l'étape 1 : $\theta(t = 0) = K + \theta_e = \theta_0$
donc $K = \theta_0 - \theta_e$; la solution de l'équation différentielle est :
$\theta = (\theta_0 - \theta_e) \times e^{-\frac{h_1 \times S}{m \times c} \times t} + \theta_e$.

b. Pour la température finale $\theta_{\text{finale}} = \theta_1$, $t_{\text{final}} = \Delta t_1$

soit $\theta_1 = (\theta_0 - \theta_e) \times e^{-\frac{h_1 \times S}{m \times c} \times \Delta t_1} + \theta_e$.

D'où $\Delta t_1 = -\dfrac{m \times c}{h_1 \times S} \times \ln\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_e}{\theta_0 - \theta_e}\right)$;

soit $\Delta t_1 = -\dfrac{\rho \times V \times c}{h_1 \times S} \times \ln\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_e}{\theta_0 - \theta_e}\right)$

$$\Delta t_1 = -\frac{\rho \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 \times c}{h_1 \times 4 \times \pi \times r^2} \times \ln\left(\frac{\theta_1 - \theta_e}{\theta_0 - \theta_e}\right)$$

$$\Delta t_1 = -\frac{\rho \times r \times c}{3 \times h_1} \times \ln\left(\frac{\theta_1 - \theta_e}{\theta_0 - \theta_e}\right).$$

Donc

$$\Delta t_1 = -\frac{3\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 15 \times 10^{-3}\ \text{m} \times 1{,}00 \times 10^3\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot {}^\circ\text{C}^{-1}}{3 \times 10\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot {}^\circ\text{C}^{-1}} \times \ln\left(\frac{320\ {}^\circ\text{C} - 20\,{}^\circ\text{C}}{400\ {}^\circ\text{C} - 20\,{}^\circ\text{C}}\right)$$

D'où $\Delta t_1 = 3{,}5 \times 10^2$ s.

3. a. Dans le cas de l'étape 2, qui commence au bout de la durée Δt_1 : $\theta(t = 0) = K + \theta_e = \theta_1$ donc $K = \theta_1 - \theta_e$; la solution de l'équation différentielle est :

$$\theta = (\theta_1 - \theta_e) \times e^{-\frac{h_2 \times S}{m \times c} \times t} + \theta_e.$$

b. Pour la température finale $\theta_{\text{finale}} = \theta_2$, $t_{\text{final}} = \Delta t_2$

soit $\theta_2 = (\theta_1 - \theta_e) \times e^{-\frac{h_2 \times S}{m \times c} \times \Delta t_2} + \theta_e$.

De même qu'en **2**, $\Delta t_2 = -\dfrac{m \times c}{h_2 \times S} \times \ln\left(\dfrac{\theta_2 - \theta_e}{\theta_1 - \theta_e}\right)$.

Soit $\Delta t_2 = -\dfrac{\rho \times r \times c}{3 \times h_2} \times \ln\left(\dfrac{\theta_2 - \theta_e}{\theta_1 - \theta_e}\right)$.

Donc

$$\Delta t_2 = -\frac{3\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 15 \times 10^{-3}\ \text{m} \times 1{,}00 \times 10^3\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot {}^\circ\text{C}^{-1}}{3 \times 6{,}0 \times 10^2\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot {}^\circ\text{C}^{-1}} \times \ln\left(\frac{35\ {}^\circ\text{C} - 20\,{}^\circ\text{C}}{320\ {}^\circ\text{C} - 20\,{}^\circ\text{C}}\right)$$

$\Delta t_2 = 75$ s .

4. C'est l'eau qui assure le refroidissement le plus rapide.