

Chapitre 8 : Mouvement dans un champ de gravitation

Feuille d'évaluation à rendre obligatoirement avec la copie

Correction Activité numérique n°8.2 – p 56 : Neptune et ses satellites

1 Énoncé des lois de Kepler

1^{re} loi de Kepler ou loi des orbites :

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre P d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

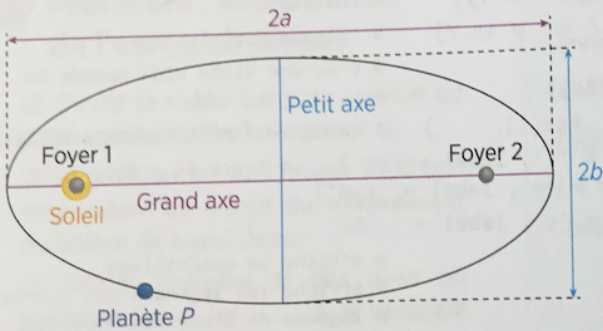
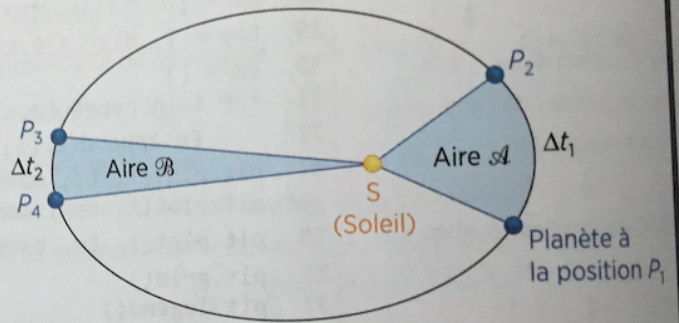


Schéma de la trajectoire elliptique d'une planète

2^e loi de Kepler ou loi des aires :

Le segment $[SP]$ qui relie le centre S du Soleil au centre P d'une planète balaie des aires égales pendant des durées Δt égales.



Si $\Delta t_1 = \Delta t_2$ alors Aire A = Aire B

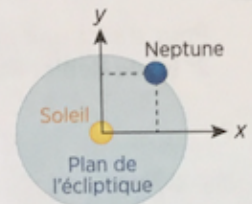
3^e loi de Kepler ou loi des périodes :

Le quotient du carré de la période de révolution T (en s) d'une planète par le cube de la longueur a (en m) du demi-grand axe de son orbite est égal à une même constante k (en $s^2 \cdot m^{-3}$) pour toutes les planètes du système solaire : $\frac{T^2}{a^3} = k$.

Donnée : constante de gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

2 Éphéméride des positions de Neptune dans le repère héliocentrique éclipique

La position prévisionnelle de Neptune dans le repère héliocentrique éclipique est donnée dans le tableau ci-dessous (à télécharger) à la même date entre 2020 et 2024 (avec pour référence l'écliptique du 1^{er} janvier 2000).



Donnée : 1 ua = $1,5 \times 10^{11}$ m = distance Terre-Soleil.

| Année | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Abscisse x (ua) | 29,4328410560730 | 29,6118356847488 | 29,7457682031831 | 29,8342404541355 | 29,8774316380940 |
| Ordonnée y (ua) | -5,3906071859853 | -4,2505317595919 | -3,1034908723970 | -1,9519995345194 | -0,7985426911486 |

Propriétés mathématiques

• Formule de Héron d'Alexandrie :

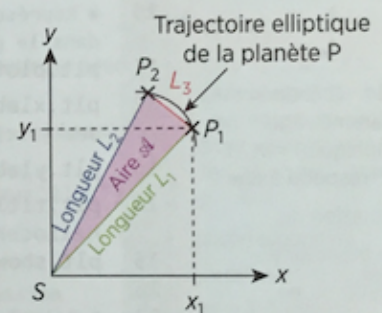
Calcul d'une aire balayée par le segment [SP] entre deux points P_1 et P_2 :

$$\text{Aire } s_4 = \sqrt{p \times (p - L_2) \times (p - L_3) \times (p - L_1)}, \text{ avec } p = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}.$$

• Calcul de l'excentricité e d'une ellipse :

$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ avec a la longueur du demi-grand axe de l'ellipse et b la longueur de son demi-petit axe.

L'excentricité indique l'écart au cercle de la forme de l'orbite : une excentricité nulle correspond à un cercle.



Application

Soient P_1 et P_2 les positions prises par Neptune respectivement en 2020 et en 2021 (tableau 2).

• Compléter les coordonnées :

- du point P_1 (29,432 841 056 073 0 ; -5,390 607 185 985 3) ;

- du point P_2 (29,611 835 684 748 8 ; -4,250 531 759 591 9) ;

- du Soleil S (0 ; 0).

• Calculer la longueur L_1 entre le Soleil et P_1 :

$$L_1 = \sqrt{(29,432\,841\,056\,073\,0)^2 + (-5,390\,607\,185\,985\,3)^2} = 29,922\,412\,64\,ua$$

• Calculer la longueur L_2 entre le Soleil et P_2 :

$$L_2 = \sqrt{(29,611\,835\,684\,748\,8)^2 + (-4,250\,531\,759\,591\,9)^2} = 29,915\,344\,44\,ua$$

3 Caractéristiques des satellites naturels de Neptune

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du demi-grand axe a de l'orbite des satellites réguliers de Neptune (c'est-à-dire ayant une orbite quasi circulaire) et leur période de révolution T .

| Satellite | Naïade | Thalassa | Despina | Galatée | Larissa | Hippocampe | Protée |
|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a (km) | $48,227 \times 10^3$ | $50,075 \times 10^3$ | $52,526 \times 10^3$ | $61,593 \times 10^3$ | $73,458 \times 10^3$ | $105,200 \times 10^3$ | $117,647 \times 10^3$ |
| T (j) | 0,294 | 0,311 | 0,335 | 0,429 | 0,555 | 0,936 | 1,122 |

Question 1 :

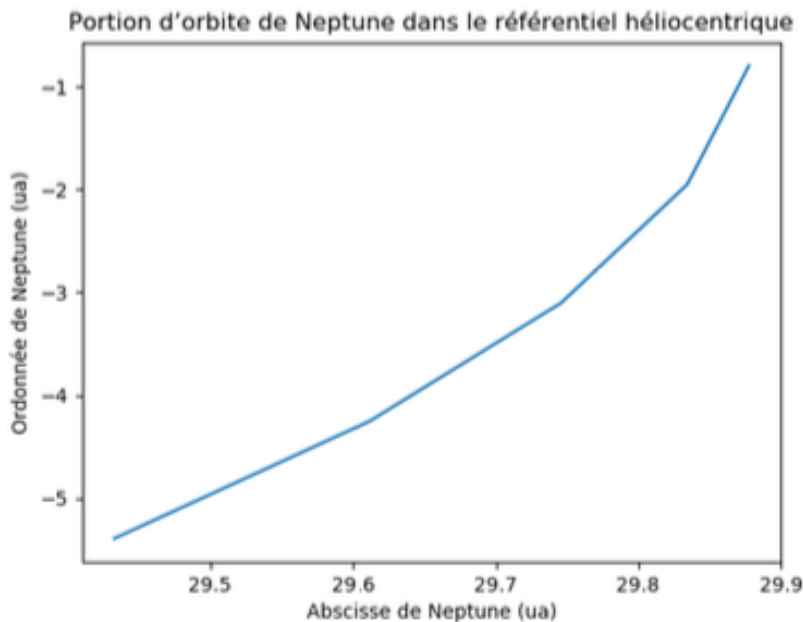
Comme l'excentricité indique l'écart au cercle de la forme de l'orbite et qu'une excentricité nulle correspond à un cercle, on en déduit que l'excentricité de Neptune $e = 0,00896$, qui est proche de zéro, permet d'affirmer que sa trajectoire est quasi circulaire autour du Soleil.

Question 2 :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt # importe les bibliothèques
   nécessaires
2 import numpy as np
3 import math as m
4
5 # Coordonnées de Neptune en unité astronomique
6 X = [29.4328410560730, 29.6118356847488, 29.7457682031831,
   29.8342404541355, 29.8774316380940] # abscisse
7 Y = [-5.3906071859853, -4.2505317595919, -3.1034908723970,
   -1.9519995345194, -0.7985426911486] # ordonnée
8 t = [2020, 2021, 2022, 2023, 2024] # dates de relevé des coordonnées
9
10 # Représentation d'une portion de l'orbite de Neptune de 2020 à 2024
   dans le plan de l'écliptique
11 plt.plot(X, Y) # trace la courbe X en fonction de Y
12 plt.xlabel('Abscisse de Neptune (ua)') # légende de l'axe des
   abscisses
13 plt.ylabel('Ordonnée de Neptune (ua)')
14 plt.title("Portion d'orbite de Neptune dans le référentiel
   héliocentrique") # titre du graphique
15 plt.show() # affiche le graphique
16
17 # Calcul des aires parcourues entre 2020 et 2021
18 L1_a = m.sqrt(X[0]**2 + Y[0]**2) # distance L1_a en ua
19 L2_a = m.sqrt(X[1]**2 + Y[1]**2)
20 L3_a = m.sqrt((X[1] - X[0])**2 + (Y[1] - Y[0])**2)
21 p_a = (L1_a + L2_a + L3_a)/2 # demi-périmètre
22 Aire_a = m.sqrt(p_a*(p_a - L2_a)*(p_a - L3_a)*(p_a - L1_a)) # aire
   balayée entre 2020 et 2021
23 print ("L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2020 et 2021
   vaut : ", round(Aire_a, 2), "ua^2") # affiche le résultat
24
25 # Calcul des aires parcourues entre 2022 et 2023
26 L1_b = m.sqrt(X[3]**2 + Y[3]**2) # distance L1_b en ua
27 L2_b = m.sqrt(X[2]**2 + Y[2]**2)
28 L3_b = m.sqrt((X[3] - X[2])**2 + (Y[3] - Y[2])**2)
29 p_b = (L1_b + L2_b + L3_b)/2 # demi-périmètre
30 Aire_b = m.sqrt(p_b*(p_b - L2_b)*(p_b - L3_b)*(p_b - L1_b)) # aire
   balayée entre 2022 et 2023
31 print ("L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2022 et 2023
   vaut : ", round(Aire_b, 2), "ua^2") # affiche le résultat
```

Question 3 :

Après exécution du programme, la fenêtre graphique ci-dessous s'affiche :



Le résultat affiché dans la console Python est :

```
>>>
L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2020 et 2021 vaut : 17.26 ua^2
L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2022 et 2023 vaut : 17.26 ua^2
>>>
```

Pendant une année, soit de 2020 à 2021, soit de 2022 à 2023, l'aire balayée est la même : $A = 17,26 \text{ ua}^2$.
D'après la 2^e loi de Kepler : le segment $[SP]$ qui relie le centre S du Soleil au centre P d'une planète (Neptune) balaie des aires égales pendant des durées égales.
La 2^e loi de Kepler est bien vérifiée.

Question 4 :

a) et b)

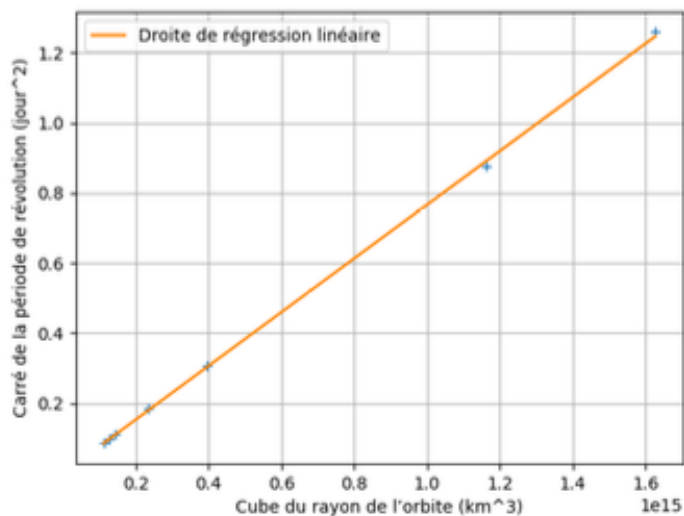
```
1 # Importation des bibliothèques et modules
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4 from scipy.stats import linregress # importe le module linregress
5
6 # Création des tableaux de valeurs
7 R = np.array([48.227e3, 50.075e3, 52.526e3, 61.593e3, 73.458e3,
8 105.200e3, 117.647e3])
9 # valeurs des rayons (en km) des orbites circulaires des satellites
   autour de Neptune
10 T = np.array([0.294, 0.311, 0.335, 0.429, 0.555, 0.936, 1.122]) #
   période de révolution (en jour) des satellites de Neptune
11 R3 = R**3 # cube du rayon de l'orbite du satellite
12 T2 = T**2 # carré de la période
13
14 # Tracé de la courbe expérimentale T2 en fonction de R3
15 plt.plot(R3, T2, '+') # trace les points expérimentaux pour la courbe
   T^2 = f(R^3)
16 plt.xlabel("Cube du rayon de l'orbite (km^3)") # légende de l'axe des
   abscisses
```

```

16 plt.ylabel("Carré de la période de révolution (jour^2)")
17 plt.grid() # affiche un quadrillage
18
19 # Régression linéaire et affichage de la droite de régression
20 (a, _, _, _, _) = linregress(R3, T2) # modélise la courbe précédente
    par une droite de coefficient directeur a
21 print('Le coefficient directeur de la droite est : ', a, "en
    jour^2/km^3") # affiche la valeur du coefficient directeur a
    T2_modelisation = a*R3 # calcule la période connaissant le
    coefficient directeur a
22 plt.plot(R3, T2_modelisation, label = 'Droite de régression
    linéaire') # trace la droite de régression linéaire
23 plt.legend() # affiche la légende des courbes
24 plt.show() # affiche le graphique

```

c) Après exécution du programme, la fenêtre graphique s'affiche :



Le résultat ci-dessous est affiché dans la console Python :

```

>>>
le coefficient directeur de la droite est : 7.658455435236676e-16 en jour^2/km^3
>>>

```

D'après la 3^e loi de Kepler : le quotient du carré de la période de révolution T d'une planète par le cube de la longueur a du demi grand axe de son orbite est égal à une même constante k pour toutes les planètes du système solaire.

Le graphique représentant l'évolution du carré de la période de révolution des satellites de Neptune en fonction du cube du rayon de leur orbite est une droite linéaire : les points expérimentaux sont alignés et la droite de régression passe par le point (0 ; 0). On en déduit que la 3^e loi de Kepler est vérifiée pour les satellites de Neptune et que la constante k correspond au coefficient directeur de la droite :

$$k = 7,66 \times 10^{-16} \text{ j}^2 \cdot \text{km}^{-3}$$

d) On sait que $\frac{T^2}{R^3} = k$ et que $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_{\text{Neptune}}}$, d'où :

$$k = \frac{4\pi^2}{G \times M_{\text{Neptune}}}$$

k est exprimé en $\text{j}^2 \cdot \text{km}^{-3}$ dans la console Python, il faut le convertir en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$:

$$k = \frac{7,66 \times 10^{-16} \text{ j}^2}{\text{km}^3} = \frac{7,66 \times 10^{-16} \times (24 \times 3\,600 \text{ s})^2}{(1 \times 10^3 \text{ m})^3} = \frac{7,66 \times 10^{-16} \times (24 \times 3\,600)^2 \text{ s}^2}{(1 \times 10^3)^3 \text{ m}^3} = 5,72 \times 10^{-15} \text{ s}^{-2} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$M_{\text{Neptune}} = \frac{4\pi^2}{G \times k} = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,72 \times 10^{-15}} = 1,04 \times 10^{26} \text{ kg}$$

La masse de Neptune vaut : $1,04 \times 10^{26} \text{ kg}$.