Correction des exercices du chapitre 14 :

Attention les corrections ne sont pas toujours rédigées correctement.
Les solutions rédigées sont faites en classe ou dans le livre avec les exercices résolus p 434-435

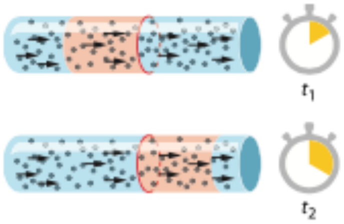
QCM
p. 433

1. **C** ; **2.** **A** et **C** ; **3.** **B** ; **4.** **C** ; **5.** **A** ; **6.** **A** et **B** ; **7.** **B** et **C** ; **8.** **A**, **B** et **C** ; **9.** **A**, **B** et **C** ; **10.** **A** et **C**.

Exercices — Appliquer le cours
p. 436

2 Définir une intensité

1. La relation qui permet de définir l'intensité du courant électrique durant une durée Δt est : $I = \frac{Q}{\Delta t}$ où Q est la quantité de charge, exprimée en coulomb (C), traversant une section de conducteur durant une durée $\Delta t = t_2 - t_1$, exprimée en seconde (s).



2. Dans une portion de conducteur, l'intensité est définie comme la dérivée de la charge électrique par rapport au temps : $i = \frac{dq}{dt}$.

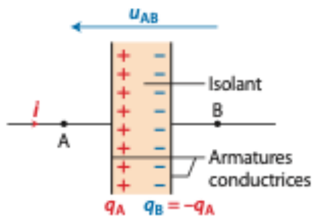
3 Comprendre l'intensité du courant

1. La charge électrique augmente proportionnellement à la durée d'après le graphique.

2. $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{6{,}0 \times 10^{-3}\ \text{C}}{4{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 1{,}5\ \text{A}$.

4 Comprendre le fonctionnement d'un condensateur

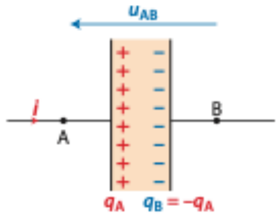
1. L'isolant est situé entre les armatures représentées par les traits verticaux : leur surface interne porte des charges de signes opposés, en égale quantité.



2. On a $i = \dfrac{dq_A}{dt} > 0$. La charge q_A est une fonction croissante du temps puisque sa dérivée est positive.

5 Exprimer une intensité

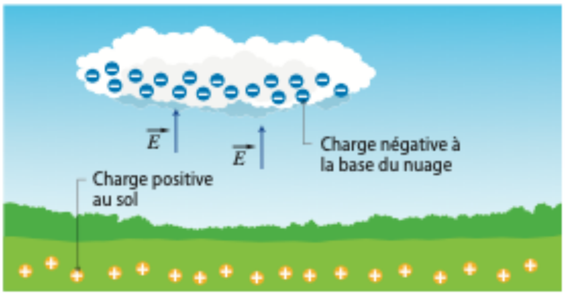
1. On a $q_A = q = C \times u_{AB}$ que l'on peut noter $q = C \times u_C$ où $u_C = u_{AB}$ désigne la tension aux bornes du condensateur.



2. En dérivant cette relation par rapport au temps t, on obtient :
$\dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$ soit $i = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

6 Identifier un condensateur (1)

1. Le bas du nuage et la surface du sol ont des charges, de signes opposés, qui sont localisées sur les surfaces en regard. C'est l'analogue des deux armatures d'un condensateur. L'air qui s'interpose constitue l'isolant.
2. Le champ électrique $\vec{E}$ est vertical et pointe du sol vers le nuage.



7 Identifier un condensateur (2)

Dans les schémas (a) et (c), on a deux conducteurs en regard, séparés par un isolant. Ces deux schémas représentent des condensateurs.

8 Déterminer la capacité d'un condensateur

1. La relation est $q_A = C \times u_C$ avec ici $u_C = u_{AB}$.
La représentation graphique montre que la charge q varie proportionnellement à la tension ; le coefficient de proportionnalité correspond à la capacité du condensateur.
On a donc $C = \dfrac{\Delta q_A}{\Delta u_C}$, soit ici : $C = \dfrac{6{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{2{,}7\ \text{V}} = 2{,}2 \times 10^{-6}\ \text{F}$.
2. L'ordre de grandeur de la capacité est le microfarad, qui est un ordre de grandeur usuel.

9 Calculer la charge emmagasinée par un condensateur

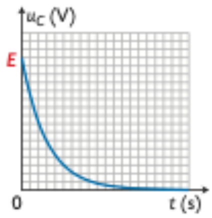
Sur la photographie, on peut lire : $C = 150\ \mu\text{F}$; $U_{max} = 200\ \text{V}$.
On a donc $q_{max} = C \times U_{max}$ soit :
$q_{max} = 150 \times 10^{-6}\ \text{F} \times 200\ \text{V} = 3{,}00 \times 10^{-2}\ \text{C}$.

10 Différencier charge et décharge d'un condensateur

• La charge correspond au circuit pour lequel l'interrupteur est en position 1. La tension évolue aux bornes du condensateur selon le schéma (b).
• La décharge correspond au circuit pour lequel l'interrupteur est en position 2. La tension évolue aux bornes du condensateur selon le schéma (a).

11 Évaluer l'évolution d'une tension

1. En position 1, le condensateur est initialement chargé. On réalise la décharge du condensateur en plaçant l'interrupteur en position 2.
2. La courbe $u_C = f(t)$ est la suivante :

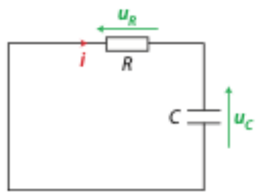


12 Établir une équation différentielle (1)

1. D'après la loi des mailles, $u_R + u_C = E$.
2. D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ d'où $R \times i + u_C = E$.
3. Comme $i = C \times \dfrac{du_C}{dt}$, on en déduit l'équation différentielle :
$R \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

13 Établir une équation différentielle (2)

1. Le schéma du circuit est le suivant :



2. D'après la loi des mailles, $u_R + u_C = 0$.
3. D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$. De plus, $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.
On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge :
$R \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$.

14 Côté maths
Résoudre une équation différentielle

$y' = 2y + 3$ avec $y(0) = -1$	$y = \dfrac{9}{2} \times e^{2x} - \dfrac{3}{2}$
$y' = 2y$ avec $y(0) = 5$	$y = \dfrac{1}{2} \times e^{2x} - \dfrac{3}{2}$
$y' = 2y + 3$ avec $y(0) = 3$	$y = 5 \times e^{2x}$

15 Résoudre une équation différentielle

1. Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.
2. Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{R \times C}$ et $b = \dfrac{E}{R \times C}$ donc $\dfrac{b}{a} = -E$. La solution générale est $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$.

16 Trouver la solution d'une équation différentielle

D'après l'expression de $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$, on en déduit que pour $t = 0$ s, $u_C = K$. Graphiquement, on lit : $u_C(0) = K = 8{,}0$ V.

17 Calculer un temps caractéristique

1. On a $\tau = R \times C$, soit :

$\tau = 1{,}0 \times 10^3\ \Omega \times 47 \times 10^{-6}\ \text{F} = 47 \times 10^{-3}\ \text{s}$.

Le temps caractéristique est 47 ms.

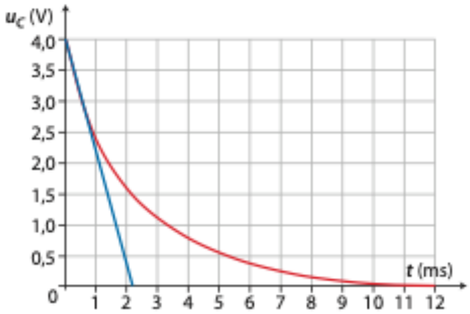
2. D'après la loi d'Ohm, $u = R \times i$ donc $1\ \Omega = 1\ \text{V} \cdot \text{A}^{-1}$.

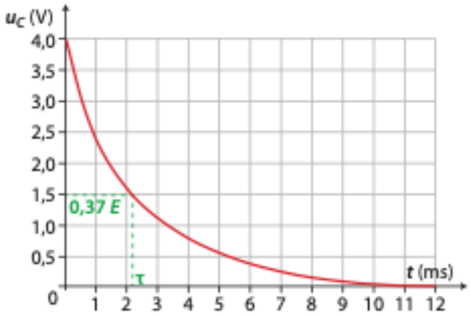
D'après la relation $i = C \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on déduit : $1\ \text{F} = 1\ \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1}$.

Ainsi, le produit $R \times C$ s'exprime en : $\text{V} \cdot \text{A}^{-1} \times \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} = \text{s}$.

18 Déterminer une capacité par évaluation d'un temps caractéristique

1. Graphiquement, par la méthode de la tangente à l'origine, ou par détermination de t pour $u_C = 0{,}37 \times E$,
soit $u_C = 0{,}37 \times 4{,}0\ \text{V} = 1{,}48\ \text{V}$, on lit $\tau = 2{,}2$ ms.





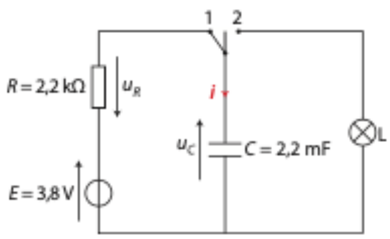
2. Comme $\tau = R \times C$, on a :

$C = \dfrac{\tau}{R}$ soit $C = \dfrac{2{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}}{1{,}0 \times 10^3\ \Omega} = 2{,}2 \times 10^{-6}$ F soit 2,2 µF.

Exercices S'entraîner p. 438

19 Flash d'un appareil photographique

1. Pour que le condensateur se charge, il est nécessaire de placer l'interrupteur en position 1.



2. D'après la loi des mailles : $u_R + u_C = E$.

D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge :

$R \times C \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-1}{R \times C} \times u_C + \dfrac{E}{R \times C}$.

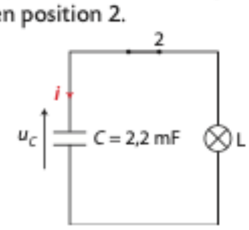
3. Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times \mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{R \times C}$ et $b = \dfrac{E}{R \times C}$ donc $\dfrac{b}{a} = -E$. Donc $u_C = K \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \times C}} + E$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = K + E = 0$ V d'après les conditions initiales.

Ainsi $K = -E$ et $u_C = -E \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \times C}} + E = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

4. Le circuit correspondant à la décharge est celui pour lequel l'interrupteur est en position 2.



5. La durée nécessaire pour que le condensateur soit déchargé à 99 % est $\Delta t = 5\tau$. Ainsi :

$\Delta t = 5R \times C \Rightarrow R = \dfrac{\Delta t}{5C}$ soit $R = \dfrac{0{,}1\ \text{s}}{5 \times 2{,}2 \times 10^{-3}\ \text{F}} = 9\ \Omega$.

20 Supercondensateurs

1. Les ordres de grandeur des capacités usuelles sont le nanofarad, le microfarad.

2. Ces condensateurs ont des capacités bien supérieures aux condensateurs usuels. Ce sont donc des supercondensateurs !

3. L'énergie stockée dans un supercondensateur chargé est :

$\mathscr{E} = \dfrac{1}{2} C \times U^2$ soit $\mathscr{E} = \dfrac{1}{2} \times 177\ \text{F} \times (51\ \text{V})^2 = 2{,}3 \times 10^5$ J.

4. L'ordre de grandeur de l'énergie stockée par le supercondensateur est bien plus faible. Cependant, il se recharge en quelques secondes, lors des arrêts fréquents du bus, permettant son utilisation tout au long de la journée. Ceci ne serait pas possible avec une batterie classique nécessitant beaucoup plus de temps pour se recharger.

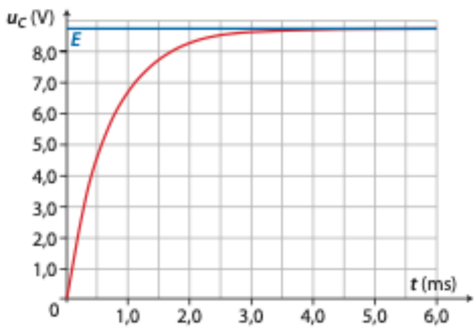
21 Connaître les critères de réussite

Caractéristiques d'une pile

1. Pour $t \to +\infty$, u_C tend vers $E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = E \times (1 - 0) = E$.

Graphiquement, on repère l'asymptote horizontale de la courbe lorsque t tend vers l'infini.

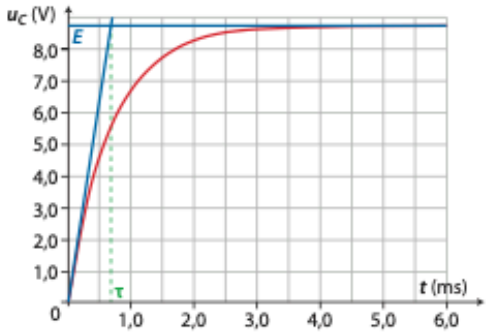
On trouve graphiquement $E = 8{,}8$ V.



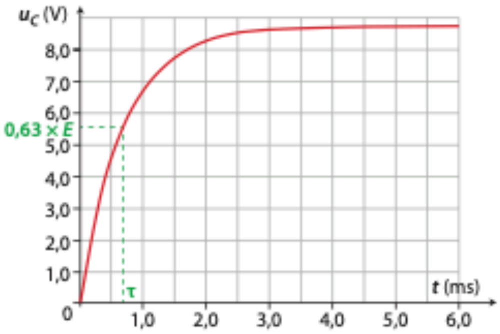
2. On retrouve graphiquement le temps caractéristique à partir de l'une des deux méthodes suivantes :

- La tangente à l'origine coupe l'asymptote d'équation $u_C = E$ pour $t = \tau$.

$\tau = r \times C \Rightarrow r = \dfrac{\tau}{C}$



• Pour $t = \tau$, on a $u_C = 0{,}63\ E$.



Dans les deux cas, on lit $\tau = 0{,}7$ ms.

3. Par définition $\tau = r \times C \Rightarrow r = \dfrac{\tau}{C}$

soit $r = \dfrac{0{,}7 \times 10^{-3}\ \text{s}}{0{,}10 \times 10^{-3}\ \text{F}} = 7\ \Omega$.

22 Le défibrillateur

1. Lors de la charge du condensateur, l'interrupteur K_1 est fermé. L'interrupteur K_2 est ouvert.

D'après la loi des mailles, $u_r + u_C = E$.

D'après la loi d'Ohm, $u_r = r \times i$ avec $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $r \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{-1}{r \times C} \times u_C + \dfrac{E}{r \times C}$.

2. Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

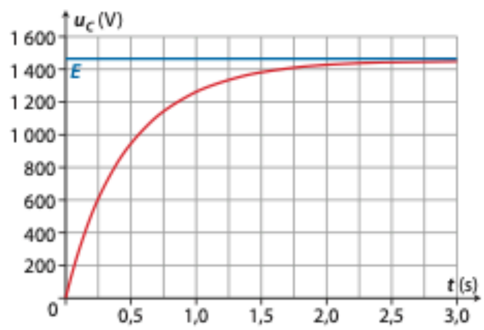
Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{r \times C}$ et $b = \dfrac{E}{r \times C}$ soit $\dfrac{b}{a} = -E$.

Donc $u_C = K \times e^{-\frac{t}{r \times C}} + E$.

Pour $t = 0$ s, d'après les conditions initiales, $u_C = K + E = 0$ V. Ainsi $K = -E$ donc $u_C = -E \times e^{-\frac{t}{r \times C}} + E = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = r \times C$.

Pour $t \to \infty$, $u_C = E\left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = E(1 - 0) = E$.

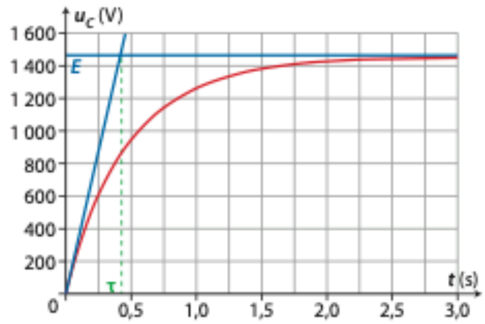
Graphiquement, on repère l'asymptote horizontale de la courbe lorsque t tend vers l'infini.



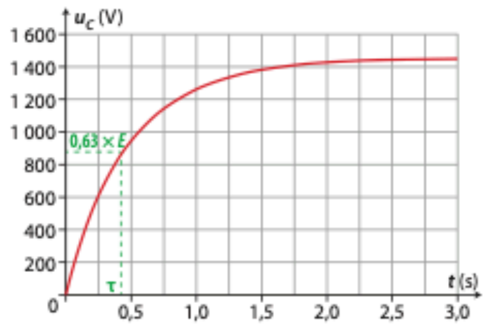
On détermine graphiquement $E = 1\,450$ V.

3. On retrouve graphiquement le temps caractéristique à partir de l'une des deux méthodes suivantes :

• La tangente à l'origine coupe l'asymptote d'équation $u_C = E$ pour $t = \tau$.



• Pour $t = \tau$, on a $u_C = 0{,}63\ E$.



On trouve $\tau = 0{,}45$ s.

4. Par définition $\tau = r \times C \Rightarrow r = \dfrac{\tau}{C}$;

soit $r = \dfrac{0{,}45\ \text{s}}{470 \times 10^{-6}\ \text{F}} = 9{,}9 \times 10^2\ \Omega$.

5. Le thorax est assimilé à un conducteur ohmique, la tension à ses bornes vérifie la loi d'Ohm : $u_R = R \times i$.

Lors de la décharge, d'après la loi des mailles : $u_R = u_C$.

Or, au début de la décharge, $u_C = E = 1\,450$ V.

Soit $R \times i = E$; l'intensité circulant à travers le thorax est donc :

$i = \dfrac{E}{R} = \dfrac{1\,450\ \text{V}}{50\ \Omega} = 29\ \text{A}$.

23 Leyden Jar

Traduction : Les bouteilles de Leyde ont été inventées au milieu du XVIIIe siècle. Elles doivent leur nom à l'Université de Leyde où se sont tenues les premières expérimentations. Ces dispositifs, bien que simples, ont représenté une percée significative dans l'histoire de l'électricité, dans la mesure où il s'agissait des premiers condensateurs et qu'en tant que tels, ils pouvaient stocker la charge électrique. Depuis un siècle, les scientifiques savaient créer de l'électricité statique avec des générateurs électrostatiques. Ils étaient maintenant capables de la stocker.

1. La bouteille de Leyde est un condensateur. Identifier ce qui correspond aux armatures et ce qui correspond au diélectrique.

2. Quelle est la propriété du condensateur découverte à Leyde ?

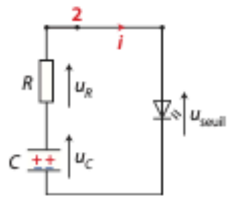
Réponses

1. La bouteille de Leyde comporte des armatures (fil et plateau en laiton) métalliques alors que l'isolant est constitué du flacon en verre et de l'air qui le remplit.

2. On peut piéger une charge électrique relativement importante pour l'époque dans ce dispositif.

24 Lampe rechargeable

1. Le schéma de la décharge correspond à l'instant où l'interrupteur est placé en position 2.



2. $i = -C \times \dfrac{du_C}{dt}$; en remplaçant u_C par son expression, on en déduit :

$$i = -C \times \frac{d}{dt}\left(\left(E - u_{seuil}\right) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + u_{seuil}\right)$$

$$i = -C \times \left(-\frac{1}{\tau} \times \left(E - u_{seuil}\right) \times e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

De plus $\tau = R \times C$, d'où $i = \dfrac{E - u_{seuil}}{R} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$.

3. L'intensité $i = 10$ mA est atteinte pour une durée Δt telle que :

$$i = \frac{E - u_{seuil}}{R} \times e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = \frac{Ri}{E - u_{seuil}}$$

d'où $\Delta t = -R \times C \times \ln\left(\dfrac{R \times i}{E - u_{seuil}}\right)$.

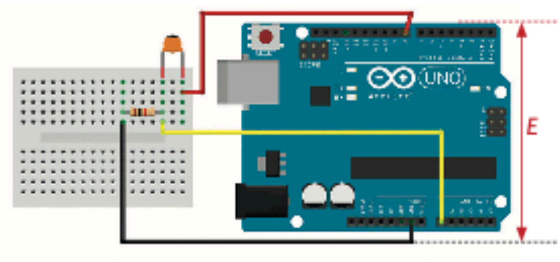
Application numérique :

$$\Delta t = -220\ \Omega \times 4{,}0\ \text{F} \times \ln\left(\frac{220\ \Omega \times 10 \times 10^{-3}\ \text{A}}{5{,}5\ \text{V} - 2{,}0\ \text{V}}\right) = 4{,}1 \times 10^{2}\ \text{s}$$

soit environ 7 minutes.

25 Détermination d'une capacité

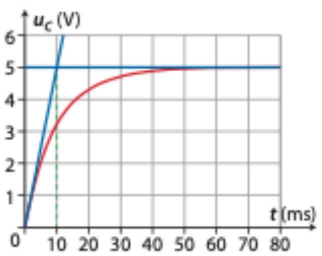
1. D'après la loi des mailles, $E = u_R + u_C$, sachant que E est la tension entre les deux bornes 8 et GND égale à 5,00 V.



On déduit de cette relation l'expression de :
$u_C = E - u_R$ soit $u_C = 5{,}00 - u_R$.
On calcule les valeurs de u_C consignées dans le tableau suivant :

t (ms)	5	10	15	20	25	30	35
u_R (V)	3,03	1,84	1,12	0,68	0,41	0,25	0,15
u_C (V)	1,97	3,16	3,88	4,32	4,59	4,75	4,85
t (ms)	40	45	50	55	60	65	70
u_R (V)	0,09	0,06	0,03	0,02	0,01	0,01	0
u_C (V)	4,91	4,94	4,97	4,98	4,99	4,99	5,00

2. La représentation graphique de la courbe $u_C = f(t)$ est la suivante :



3. On relève par la méthode de la tangente $\tau = 10{,}0$ ms.

4. $\tau = R \times C$ d'où $C = \dfrac{\tau}{R}$ soit $C = \dfrac{10{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}}{1{,}0 \times 10^{3}\ \Omega}$;

$C = 10 \times 10^{-6}$ F ou 10 µF.

5. Pour améliorer la détermination de la capacité C, il est préférable d'augmenter le nombre de points de mesure pour obtenir une courbe plus précise et pour mieux lisser la courbe de la tension observée ; il faut donc diminuer l'intervalle de temps entre deux mesures pour la même durée d'enregistrement.

26 Résolution de problème
Condensateur et sécurité

1re étape : S'approprier la question posée

1. Quelle est la capacité du condensateur ?

2. Quelle est la valeur du temps caractéristique pour le dipôle RC ?

2e étape : Lire et comprendre les documents

Le document indique que l'on réalise la décharge du condensateur à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 2{,}0 \times 10^{3}\ \Omega$. Sur la photographie, on lit la capacité du condensateur $C = 1\,000$ µF. Le document indique également que le condensateur doit être déchargé à 99 % ; ce qui correspondra à une tension u_C égale à 1 % de E au bout de la durée recherchée.

3e étape : Dégager la problématique

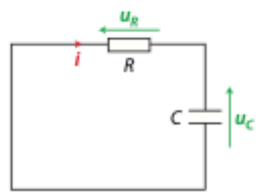
Pour quelle durée, le dipôle RC ainsi réalisé sera-t-il déchargé à 99 % ?

4e étape : Construire la réponse

- Établir le schéma du circuit électrique.
- Établir l'expression de la tension u_C aux bornes du condensateur lors de sa décharge.
- Déduire de cette relation la durée au bout de laquelle, le dipôle RC sera déchargé à 99 %.
- Conclure.

5e étape : Répondre

Le schéma du circuit électrique est le suivant et correspond à une décharge :



D'après la loi des mailles, $u_R + u_C = 0$.

D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$ et $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{R \times C}$ et $b = 0$, donc $\dfrac{b}{a} = 0$.

Donc : $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = E$. Ainsi $K = E$.

La tension u_C aux bornes du condensateur vérifie la relation :

$$u_C = E \times e^{-\frac{t}{R \times C}}.$$

D'après la photographie $C = 1\,000$ µF. On peut calculer le temps caractéristique :

$\tau = R \times C$ soit $\tau = 2{,}0 \times 10^{3}\ \Omega \times 1\,000 \times 10^{-6}\ \text{F} = 2{,}0$ s.

Le condensateur est déchargé à 99 % si $u_C = 1$ % de E ;

soit $\dfrac{u_C}{E} = 0{,}01$ ou $\dfrac{E \times e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}}{E} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 0{,}01$.

On a donc : $\dfrac{\Delta t}{\tau} = -\ln 0{,}01 = 4{,}6 \Rightarrow \Delta t = 4{,}6 \times \tau$

soit $\Delta t = 4{,}6 \times 2{,}0 \text{ s} = 9{,}2 \text{ s}$.

Il faut attendre au moins 10 secondes pour décharger totalement le condensateur.

27 Capteur capacitif de pression

1. La pression relative mesurée est nulle.

2. Le capteur peut être assimilé à un condensateur plan car il est constitué de deux armatures planes ou quasiment séparées par un isolant (couche d'air).

3. Si la pression externe exercée à la base du capteur augmente et devient supérieure à la pression atmosphérique, l'épaisseur du condensateur diminue. D'après la relation du doc. **B**, la capacité est inversement proportionnelle à l'épaisseur *e* donc la capacité du capteur augmente.

4. a. $C = \dfrac{8{,}85 \times 10^{-12} \times S}{e}$ avec $S = \dfrac{\pi \times D^2}{4}$; on trouve :

$C = \dfrac{8{,}85 \times 10^{-12} \times \pi \times D^2}{4e}$;

soit $C = \dfrac{8{,}85 \times 10^{-12} \times \pi \times \left(10 \times 10^{-2} \text{ m}\right)^2}{4 \times 1{,}0 \times 10^{-3} \text{ m}} = 7{,}0 \times 10^{-11} \text{ F}$.

b. L'ordre de grandeur de cette capacité, 10^{-10} F, est usuel.

28 À chacun son rythme

Dans 40 s, l'alarme se déclenchera…

1. Déterminons l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur lorsqu'un utilisateur entre dans l'appartement. Dans ce cas, l'interrupteur K est ouvert, donc :

– d'après la loi des mailles : $u_R + u_C = E$;

– d'après la loi d'Ohm : $u_R = R \times i$ avec $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $R \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{-1}{R \times C} u_C + \dfrac{E}{R \times C}$.

2. Les solutions d'une équation du type $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{R \times C}$ et $b = \dfrac{E}{R \times C}$, donc $\dfrac{b}{a} = -E$.

Les solutions s'écrivent : $u_C = K \times e^{-\frac{t}{RC}} + E$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = K + E = 0$ V d'après les conditions initiales (le condensateur est déchargé). Ainsi $K = -E$ et

$u_C = -E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$ soit $u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = R \times C$.

3. L'alarme se déclenche pour une durée $\Delta t = t_{\text{décl}} - 0$ telle que $u_C = 5{,}0$ V. Il vient alors :

$\dfrac{u_C}{E} = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 1 - \dfrac{u_C}{E}$

soit $\Delta t = -\tau \times \ln\left(1 - \dfrac{u_C}{E}\right)$

soit $\Delta t = -R \times C \times \ln\left(1 - \dfrac{u_C}{E}\right)$, donc :

$\Delta t = -1{,}0 \times 10^6 \ \Omega \times 22 \times 10^{-6} \text{ F} \times \ln\left(1 - \dfrac{5{,}0 \text{ V}}{6{,}0 \text{ V}}\right) = 39 \text{ s}$.

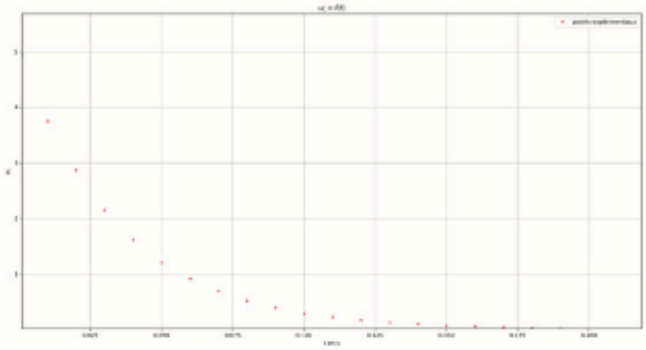
29 Python

Temps caractéristique

Ressources pour le professeur à télécharger :
- **Fichier Python**
- **Explications du programme en langage Python**

1. On met en œuvre le programme.

La courbe fournie est la suivante :



Il s'agit d'une décharge du condensateur car u_C décroît au cours du temps. Par lecture graphique à $t = 0$ s, on lit la tension sous laquelle le condensateur a été initialement chargé : $E = 5$ V environ.

2. Lors de la décharge, la tension aux bornes du condensateur est définie par :

$u_C = E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} \Rightarrow \ln u_C = \ln\left(E \times e^{-\frac{t}{R \times C}}\right) = \ln E - \dfrac{t}{R \times C}$.

3. Il est nécessaire de calculer les valeurs de $\ln u_C$. Pour cela, on rentre la ligne suivante dans le programme :

```
40  lntension=np.log(tension)
```

ou

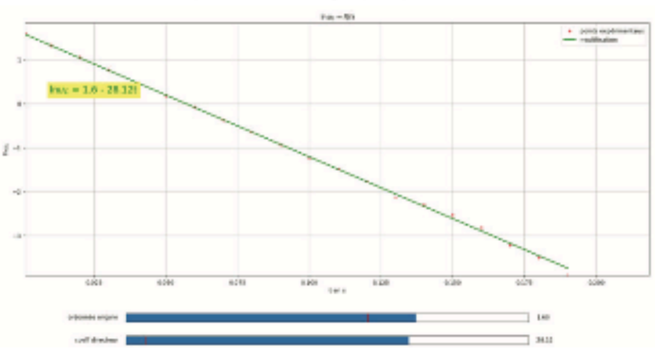
```
40  lntension =[np.log(valeurs) for valeurs in tension]
```

ou encore

```
40  for i in range len(tension)
41      lntension=lentension+[np.log(tension[i])]
```

Le programme affiche directement la courbe si la liste `lntension` n'est pas vide.

4. On obtient la représentation graphique suivante :



L'équation de la courbe est :

$\ln u_C = 1{,}6 - 28{,}12 \times t$ (unités SI).

5. D'après **2.** et **4.** on a :

$-28{,}12 \text{ s}^{-1} = -\dfrac{1}{R \times C}$ d'où $\tau = \dfrac{1}{28{,}12 \text{ s}^{-1}}$

soit $C = \dfrac{1}{28{,}12 \text{ s}^{-1} \times R} = \dfrac{1}{28{,}12 \text{ s}^{-1} \times 220 \ \Omega} = 1{,}62 \times 10^{-4} \text{ F}$.

Vers le Bac

Préparation à l'écrit

28 Airbag et condensateur

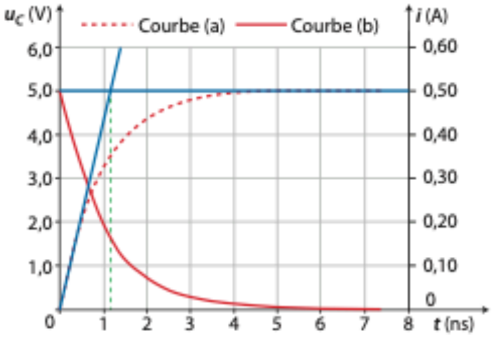
Partie I

1. La capacité du condensateur est de 100 pF, ce qui est de l'ordre de grandeur des capacités usuelles.

2. À l'instant $t = 0$ s, le condensateur est déchargé, donc la tension à ses bornes est nulle.

La courbe (b) représente donc la courbe $u_C = f(t)$. Au bout d'un temps suffisamment long, le condensateur est chargé (la tension à ses bornes est égale à celle du générateur) et l'intensité du courant dans le circuit est $i = 0$ A. La courbe (a) représente donc l'évolution temporelle du courant i.

3. a. Graphiquement, on peut utiliser la méthode de la tangente à l'origine.



On trouve graphiquement $\tau = 1{,}2$ ns.

b. Ce temps est extrêmement court comparé à la durée du choc de 200 ms. Le condensateur a largement le temps d'être chargé, donc l'airbag se déclenchera pendant le choc.

4. Établissons l'équation différentielle de la charge du condensateur :

– d'après la loi des mailles : $u_R + u_C = E$;

– d'après la loi d'Ohm : $u_R = R \times i$ avec $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$;

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $R \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{-1}{R \times C} u_C + \dfrac{E}{R \times C}$.

5. Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{R \times C}$ et $b = \dfrac{E}{R \times C}$, donc $\dfrac{b}{a} = -E$. Les solutions sont de la forme $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = K + E = 0$ V d'après les conditions initiales. Ainsi $K = -E$ et :

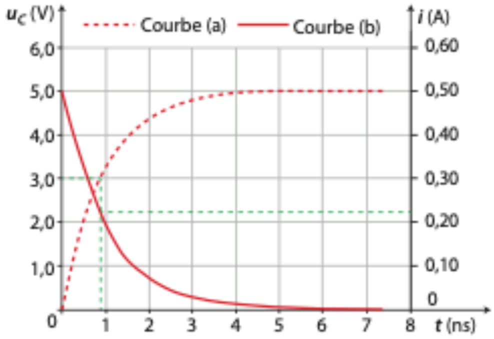
$u_C = -E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = R \times C$.

6. D'après la solution $\tau = R \times C \Rightarrow R = \dfrac{\tau}{C}$

soit $R = \dfrac{1{,}2 \times 10^{-9}\ \text{s}}{100 \times 10^{-12}\ \text{F}} = 12\ \Omega$.

L'ordre de grandeur de la résistance est de la dizaine d'ohms.

7. On a à tout instant : $u_R = R \times i$.



Prenons une valeur quelconque du graphique.

Pour $u_C = 3{,}0$ V, on a $i = 0{,}21$ A. D'après la loi des mailles, $u_R = E - u_C$ soit $u_R = 5{,}0 - 3{,}0 = 2{,}0$ V.

On en déduit : $R = \dfrac{u_R}{i} = \dfrac{2{,}0\ \text{V}}{0{,}21\ \text{A}} = 9{,}5\ \Omega$.

On retrouve bien le même ordre de grandeur.

Partie II

1. Le rapprochement des deux armatures entraîne une diminution de la distance d et une augmentation de la capacité C. La bonne expression est celle pour laquelle C et d sont inversement proportionnelles, soit l'expression b.

2. L'interrupteur a été fermé au moment de la mise sous tension de l'accéléromètre bien avant le choc. Comme le temps caractéristique du dipôle d'après la question **I 3. b.** est très inférieur à la durée du choc, on peut considérer que la charge du condensateur a été instantanée. On a donc $u_C = E$.

De plus $q = C \times u_C$ d'où $q = C \times E$.

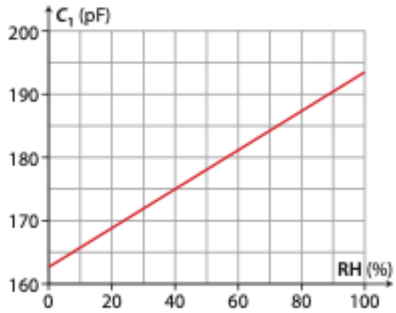
3. Le choc ne modifie pas la force électromotrice de la pile E. La tension aux bornes du condensateur reste donc la même : $u_C = E = 5{,}0$ V.

Or $q = C \times u_C$; comme la capacité C du condensateur augmente avec le choc, et que la tension u_C reste inchangée, la charge q du condensateur augmente lors du choc : le condensateur de capacité plus grande continue à se charger !

Cette variation Δq de la charge q au niveau de chaque armature du condensateur en une durée Δt entraîne le passage d'un courant d'intensité moyenne $i = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$, lequel peut être détecté. Ce courant est de même sens que lors de la charge du condensateur.

Préparation à l'ECE

1. Représentons le graphique de $C_1 = f(\text{RH})$.



2. La modélisation de la courbe donne une fonction affine d'équation $C_1 = 1{,}6 \times 10^2 + 3{,}1 \times 10^{-1} \times \text{RH}$ (avec deux chiffres significatifs). On retrouve bien l'expression demandée.

3. Dans cette association série, chaque condensateur porte la même charge et donc : $q = C_1 \times u_{C_1} = C_2 \times u_{C_2}$ d'où $C_1 = C_2 \times \dfrac{u_{C_2}}{u_{C_1}}$.

Recherchons u_{C_2} :

D'après la loi des mailles : $E = u_{C_1} + u_{C_2}$.

On a donc :

$u_{C_2} = E - u_{C_1}$ soit $u_{C_2} = 3{,}30\ \text{V} - 1{,}83\ \text{V} = 1{,}47\ \text{V}$.

D'où la capacité du capteur d'humidité :

$$C_1 = 220\ \text{pF} \times \frac{1{,}47\ \text{V}}{1{,}83\ \text{V}} = 177\ \text{pF}.$$

La courbe $C_1 = f(RH)$ ou courbe d'étalonnage du capteur d'humidité nous permet d'obtenir, pour $C_1 = 177$ pF, un taux d'humidité RH = 55 % à l'aide de l'équation de la droite ou par lecture graphique.

Vers l'oral

p. 444

Je m'exprime à l'oral sur

Le dipôle *RC*

- **Citer une application des condensateurs.**

La fonction principale d'un condensateur est de stocker des charges électriques dans le but de les restituer pour les besoins de l'appareil sur lequel il est utilisé. Les condensateurs sont présents dans les flashs d'appareils photographiques, dans les air-bags, etc.

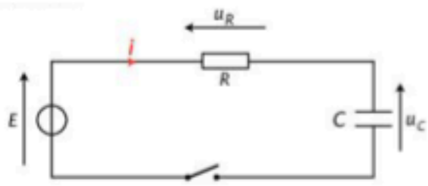
- **Quelle est l'expression du temps caractéristique d'un dipôle *RC* ?**

Le temps caractéristique d'un dipôle *RC* se note τ. Il est défini par le produit de la résistance *R* du conducteur ohmique constituant le dipôle *RC*, exprimée en ohm, par la capacité *C* du condensateur, exprimée en farad : $\tau = R \times C$.

- **Montrer le lien entre un orage et un condensateur chargé.**

Lors d'un orage, une accumulation de charges électriques peut avoir lieu entre le nuage et le sol, l'air jouant le rôle d'un diélectrique. Si la valeur du champ électrique entre la surface de la base du nuage et le sol devient trop importante, l'air ne joue plus son rôle d'isolant, un arc électrique se déclenche. C'est l'éclair de l'orage.

EXERCICE 1



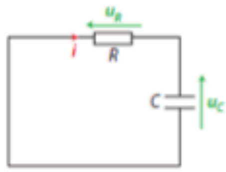
Un condensateur préalablement déchargé est placé en série avec un conducteur ohmique. À t = 0 s, l'interrupteur est fermé.

1. Utiliser la loi des mailles pour établir une relation entre les tensions u_C, u_R et E.
   D'après la loi des mailles dans le circuit, E = u_R + u_C
2. Remplacer la tension u_R en utilisant la loi d'Ohm.
   D'après la loi d'Ohm, u_R = R x i, d'où R x i + u_c = E.
3. Sachant que $i = C \times \frac{du_c}{dt}$, trouver l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.
   De plus, $i = \frac{dq_A}{dt}$ et q_A = C x u_C.
   D'où $i = \frac{d(C \times u_C)}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$ (2).
   Comme i = $C \times \frac{du_C}{dt}$, on en déduit l'équation différentielle : R x C $\times \frac{du_C}{dt}$ + U_C = E

EXERCICE 2

Un circuit est constitué d'un condensateur chargé de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R.

1. Représenter le circuit correspondant et flécher les tensions.
   Le schéma du circuit est le suivant :



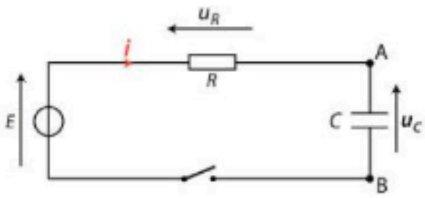
2. Établir une relation entre la tension u_C aux bornes du condensateur et la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique.
   D'après la loi des mailles, $u_R + u_C = 0$.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C.
   D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \times i$. De plus, $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$.
   On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa décharge :
   $R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$.

EXERCICE 3

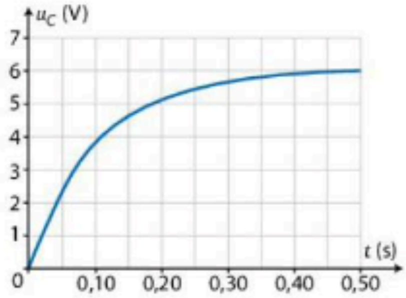
L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes d'un condensateur chargé à l'aide d'une source idéale de tension E est : $\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R \times C} + \frac{E}{R \times C}$

1. Rappeler la forme des solutions d'une équation différentielle y' = a.y + b avec a ≠ 0.
   Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme
   $y = K \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec K une constante d'intégration réelle.
2. Par identification, donner la forme des solutions de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
   Par identification, on trouve $a = -\frac{1}{R \times C}$ et b = $\frac{E}{R \times C}$ donc $\frac{b}{a}$ = - E.
   La solution générale est $u_C = K \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E$.

EXERCICE 4



On associe un condensateur de capacité C = 100 µF en série avec un condensateur ohmique de résistance R = 1,0 kΩ. À l'instant t = 0 s, on ferme le circuit schématisé ci-contre. Préalablement déchargé, le condensateur est alors mis en charge. La source idéale de tension permettant cette charge est telle que E = 6,0 V.

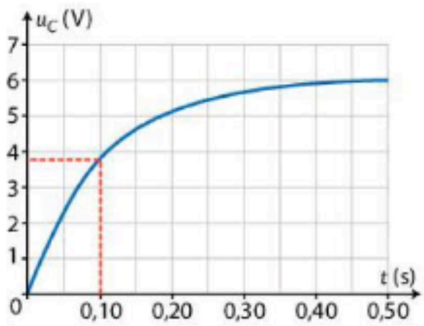


1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge.
   D'après la loi des mailles dans le circuit, E = u_R + u_C (1).
   D'après la loi d'Ohm, u_R = R x i
   De plus, $i = \frac{dq_A}{dt}$ et q_A = C x u_C.
   D'où $i = \frac{d(C \times u_C)}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$ (2).
   En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $E = R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C$
   Le produit R x C est le temps caractéristique du dipôle RC que l'on note τ.
   Ainsi, l'équation différentielle peut s'écrire : $E = \tau \times \frac{du_C}{dt} + u_C$
2. Résoudre cette équation différentielle et montrer que, lors de la charge, la tension u_C peut s'écrire, avec u_C exprimée en volt et t exprimée en seconde : $u_C = 6{,}0 \times (1 - e^{-\frac{t}{0{,}10}})$
   L'équation différentielle peut se réécrire sous la forme : $\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{\tau} u_C + \frac{E}{\tau}$
   Les solutions de l'équation différentielle y' = a x y + b sont de la forme :
   y = K x e^{ax} - $\frac{b}{a}$ avec K un réel et a ≠ 0.
   Ici, les solutions sont de la forme u_C = $K \times e^{-\frac{t}{\tau}} + E$.
   Initialement, le conducteur est déchargé, d'où $u_C(0)$ = 0 V.

   Or d'après la solution, $u_C(0)$ = K + E. On en déduit : K = - E.
   La solution de l'équation est donc : u_C = $E \times (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
   E = 6,0 V et τ = R x C soit τ = 1,0 x 10^3 x 100 x 10^{-6} = 0,10 s. On retrouve l'expression de u_C :
   $u_C = 6{,}0 \times (1 - e^{-\frac{t}{0{,}10}})$ avec u_C en voit et t en seconde.
3. Retrouver graphiquement le temps caractéristique du dipôle RC.

Le temps caractéristique peut être déterminé, par exemple, par la méthode suivante :
D'après l'expression obtenue à la question 2, pour t = τ, le condensateur atteint 63 % de sa charge. On détermine dans un premier temps la tension u_c correspondante :
u_C (τ) = 0,63 x 6,0 = 3,8 V.

On lit graphiquement l'abscisse correspondante.
On retrouve le résultat de la question précédente : τ = 0,10 s.



<u>Type Bac :</u> Voiture électrique (~ 1h)

Voici la Bluecar ou B^0 : c'est une petite voiture citadine entièrement électrique, elle n'émet aucun gaz, aucune particule fine.
Alimentées par des batteries (Lithium Métal Polymère) des supercapacités et des panneaux solaires, ces voitures possèdent une autonomie de plus de 250 km soit bien plus que les 40 km qui sont la moyenne des déplacements.
Les supercapacités ont pour rôle de récupérer et stocker l'énergie de freinage, pus de la restituer au redémarrage. Il en résulte des accélérations plus puissantes, une augmentation de l'autonomie et une durée de vie accrue pour la batterie.
Ce sont des voitures rapides, leur vitesse maximale est de 130 km/h, agréables à conduire, sûres et endurantes.

D'après le site Internet Bluecar.

Le supercondensateur

Les supercondensateurs ont une capacité de plusieurs milliers de farads et une tension d'utilisation de 2,7 V. Un supercondensateur est équivalent à un dipôle MP associant en série un condensateur de grande capacité *C* et un conducteur ohmique de faible résistance *R* (voir la **figure 1** ci-dessous).

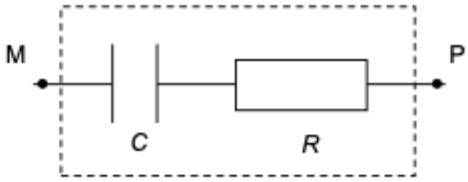


Figure 1. Modèle du supercondensateur

Les caractéristiques techniques d'un supercondensateur qu'on peut trouver à partir du site internet du constructeur sont les suivantes :

Capacité (25°C, 100 A)	$2{,}6 \times 10^3$ F	Masse	0,500 kg
Tension d'utilisation	2,7 V	* Énergie spécifique (2,7 V, 25°C)	$1{,}9 \times 10^4$ J.kg^{-1}
Résistance série (25°C,100 A)	0,35 mΩ	Constante de temps (25°C,100 A)	0,90 s

**L'énergie spécifique est l'énergie que le supercondensateur peut restituer par unité de masse.*

1. Étude théorique préalable de la décharge du supercondensateur

On étudie la décharge du supercondensateur, celui-ci ayant été au préalable chargé sous la tension d'utilisation E = 2.7 V.
Le schéma du circuit électrique de décharge est donné **figure 2**.
Avec l'orientation choisie, l'intensité i du courant s'exprime par la relation $i = \frac{dt}{dt}$

où q est la charge positive portée par l'armature N du condensateur. La tension aux bornes du dipôle NM s'exprime par la relation $u_C = \frac{q}{C}$.

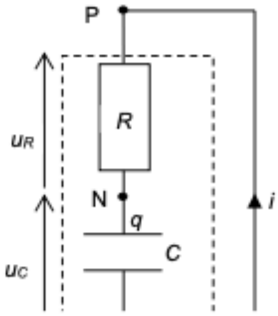


Figure 2. Circuit de décharge

1.a) Exprimer la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique en fonction de sa résistance R et de i, puis en fonction de R, C et $\frac{du_C}{dt}$.

La loi d'Ohm impose : $u_R = R.i$. (convention récepteur).

Par ailleurs : q = C.uc et $i = \frac{dq}{dt}$ donc : $i = \frac{d(C.U_C)}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$ car C es constant.
Finalement, en reportant l'expression de l'intensité i dans u_R, il vient :

$$U_R = RC.\frac{dU_C}{dt} \ (1)$$

1.b) Établir la relation entre u_R et u_C et en déduire l'équation différentielle vérifiée par u_C.
La loi d'additivité des tensions donne : $u_R + u_C = 0$
En reportant l'expression (1), on obtient l'équation différentielle sur u_C :

$$RC.\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \quad (2)$$

1.c) En vérifiant que l'expression $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de l'équation différentielle, montrer que l'expression de la constante de temps τ est égale à RC.

MÉTHODE 1 : On remplace l'expression $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ dans l'équation précédente.
Si l'expression $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ est une solution elle doit vérifier l'expression précédente.

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} \ (3)$$

En reportant (3) et l'expression de $u_C(t)$ dans (2), il vient : $R.C.\left(-\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + E.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$
En simplifiant par E et en mettant $e^{-\frac{t}{\tau}}$ en facteur : $e^{-\frac{t}{\tau}}.\left(\frac{R.C}{\tau} + 1\right) = 0$
Comme $e^{-\frac{t}{\tau}} \neq 0$ quel que soit t, on a : $\left(-\frac{R.C}{\tau} + 1\right) = 0$ d'où $\frac{R.C}{\tau} = 1$ soit $\tau = R.C$

MÉTHODE 2 : On détermine la solution de l'équation précédente

$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{RC}$ est une équation différentielle de type y' = a y qui a pour solution $y = K\,e^{at}$

Nous avons la constante $a = -\frac{1}{RC}$ et la variable $y = U_c$

Ce qui nous donne pour solution $U_c = K\,e^{-t/RC}$

Aux conditions initiales, à t = 0 s, le condensateur est totalement chargé ce qui donne :
$U_c(t = 0\ s) = E = K\,e^{-0/RC} = K$ car $e^0 = 1$
La constante K est donc égale à E.

L'expression finale de la solution est donc bien $U_c = E.\,e^{-t/RC}$ avec $RC = \tau$.

1.d) L'expression de l'intensité i peut se mettre sous la forme $i(t) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$. Monter que l'intensité I_0 à t = 0 est égale à $-\frac{E}{R}$.
On a : $i = C.\frac{dU_C}{dt}$ et $\frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ donc $i(t) = -C\frac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{CE}{RC}.e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ (4)
D'après (4) $i(0) = -\frac{E}{R}e^0 = -\frac{E}{R}$ et d'après $i(t) = I_0.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ $i(0) = I_0.e^0 = I_0$;

donc par identification $I_0 = -\frac{E}{R}$

2. Étude de la variation de l'intensité du courant lors de la décharge du supercondensateur

On mesure, avec un capteur de courant spécifi … ıteur. La courbe donnant l'intensité i en fonction du … ent à permis de tracer la tangente à l'origine.

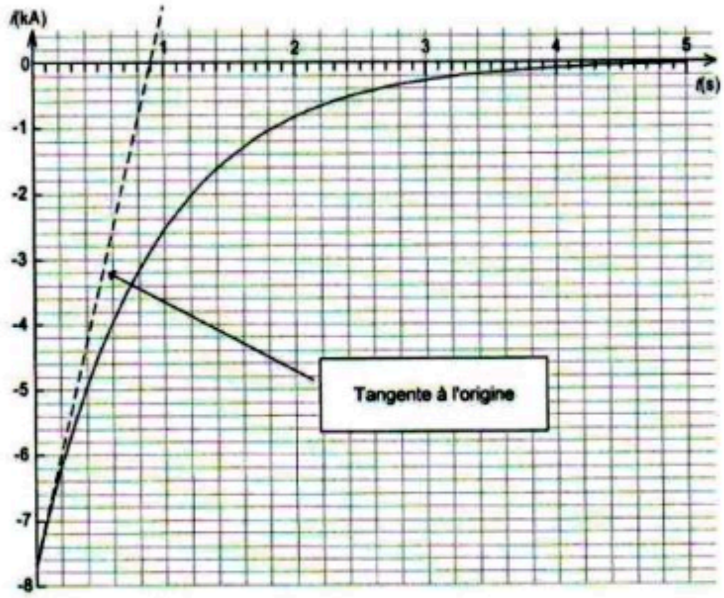


Figure A1. Intensité *i* débitée par le supercondensateur en fonction du temps

2.a) Déterminer graphiquement la valeur de I_0. En déduire la valeur de la résistance R. Vérifier qu'elle est en accord avec celle du tableau.

Graphiquement $I_0 = i(0) = -7{,}7$ kA.

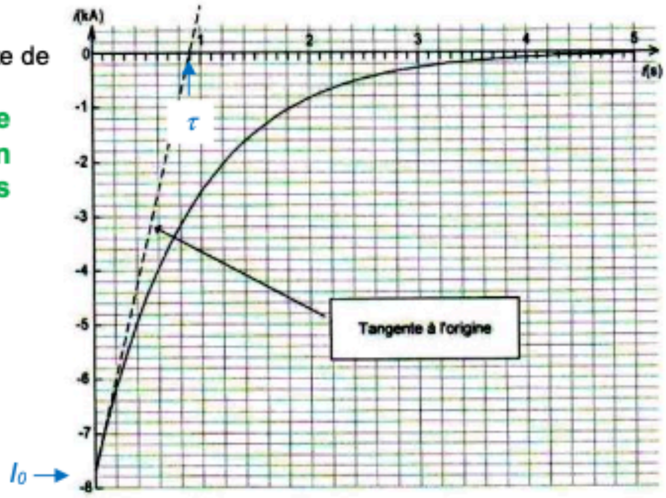
$\mathbf{I_0 = -\frac{E}{R}}$ **donc** $\mathbf{R = -\frac{E}{I_0}}$

$\mathbf{R = -\frac{2{,}7}{(-7{,}7\times10^3)}}$ **= 3,5× 10⁻⁴ Ω = 0,35 mΩ.**

La valeur trouvée est bien en accord avec celle du tableau, 0,35 mΩ.

2.b) Déterminer graphiquement la valeur de la constante de

Graphiquement la valeur de la constante de temps τ est l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'axe des abscisses : τ = 0,90 s.



2.c) En déduire la valeur de la capacité C. Est-elle en accord avec la valeur indiquée dans les caractéristiques techniques ?

τ = R.C donc $\mathbf{C = \frac{\tau}{R}}$ **Soit** $\mathbf{C = \frac{0{,}90}{3{,}5\times10^{-4}} = 2{,}6\times10^3}$ **F.**

Cette valeur est bien en accord avec celle indiquée dans les caractéristiques techniques (C = 2,6×10³ F).

3. Étude énergétique

3.a) Calculer la valeur de l'énergie électrique maximale E_C emmagasinée et restituée par le condensateur lors de sa décharge en prenant la valeur de la capacité fournie dans le tableau.

Energie électrique maximale E_C emmagasinée par le supercondensateur :

$E_C = \frac{1}{2} C.E^2$ soit $E_C = \frac{1}{2} \times 2,6 \times 10^3 \times (2,7)^2 = 9,5 \times 10^3$ J = 9,5 kJ.

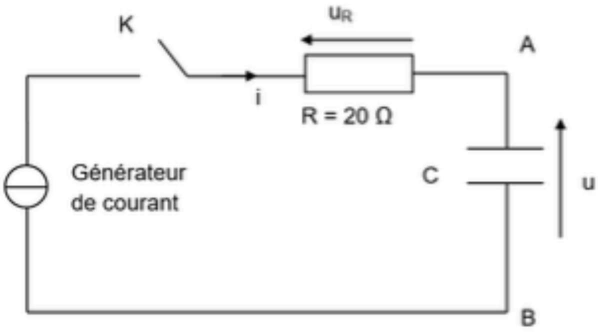
3.b) Comparer cette valeur de l'énergie avec celle obtenue en utilisant les valeurs de la masse et de l'énergie spécifique de ce supercondensateur.

En multipliant l'énergie spécifique massique par la masse du supercondensateur, il vient : $1,9 \times 10^4 \times 0,500 = 9,5 \times 10^3$ J = 9,5 kJ. On retrouve bien la valeur de l'énergie électrique maximale E_C emmagasinée par le supercondensateur.

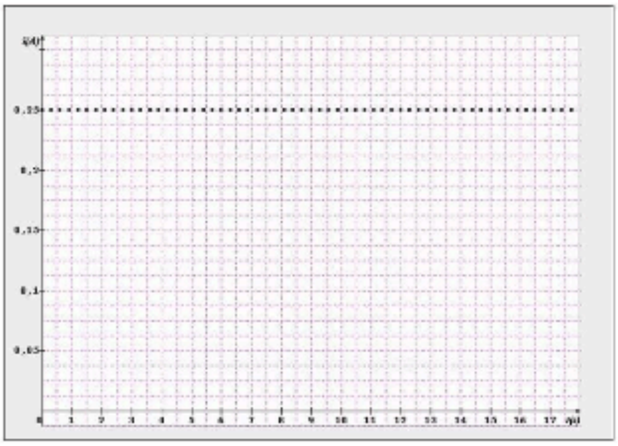
Type Bac : Les condensateurs (~ 1h10)

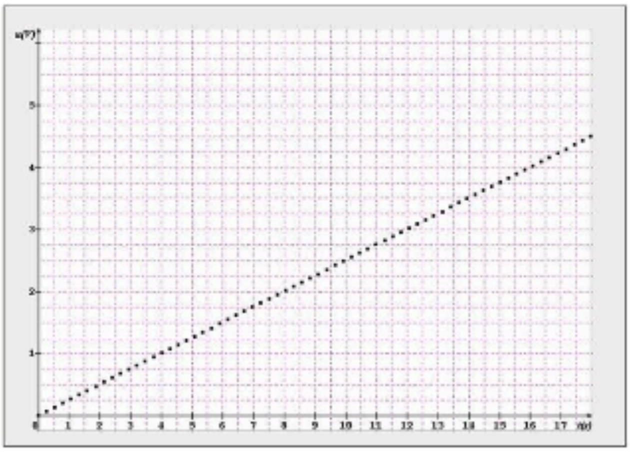
1. Charge d'un condensateur à courant constant

Une première méthode consiste à charger le condensateur à l'aide d'un générateur délivrant un courant d'intensité I constant, selon le montage suivant.



À la date t = 0 s, on ferme l'interrupteur K et on enregistre les variations au cours du temps de la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique de résistance R = 20 Ω et de la tension u aux bornes du condensateur. Après traitement, on obtient les courbes ci-après :





1.a) Montrer que le graphe i(t) est obtenu à partir de l'enregistrement de $u_R(t)$.

La loi d'Ohm, en convention récepteur, s'écrit : $u_R(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{U_R(t)}{R}$

Ainsi, les mesures de $u_R(t)$ à chaque instant, permettent de calculer les valeurs de $\frac{U_R(t)}{R}$ et donc de tracer le graphe i(t).

1.b) Utiliser l'un des graphes pour déterminer la relation numérique entre la tension u aux bornes du condensateur et le temps. Justifier le calcul.

Le graphe u(t) est une droite passant par l'origine modélisée par une fonction linéaire donc : u = k . t où k le coefficient directeur de la droite.

Entre l'origine et le dernier point du graphe : $k = \frac{4,5-0}{18-0}$ = 0,25 V.s^{-1} donc : u = 0,25.t

1.c) En considérant qu'à t = 0 s le condensateur est déchargé, donner l'expression littérale de la charge q_A portée par l'armature A du condensateur en fonction du temps.

En convention récepteur : $i(t) = \frac{dq_A}{dt}$ = I, avec I = 0,25 A donc $q_A(t)$ = I.t + Cte

À t = 0 s le condensateur est déchargé, donc $q_A(0)$ = 0 + Cte = 0 C d'où Cte = 0, ainsi $q_A(t)$ = I.t

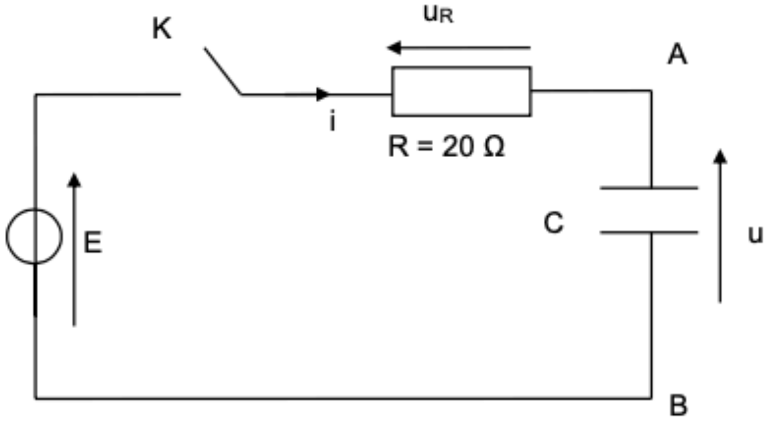
1.d) Calculer le quotient $\frac{q_A}{u}$. Que représente-t-il ?

$$\frac{q_A}{u} = \frac{I.t}{k.t} = \frac{I}{k} = \frac{0,25}{0,25} = 1,0\ C.V^{-1}.$$

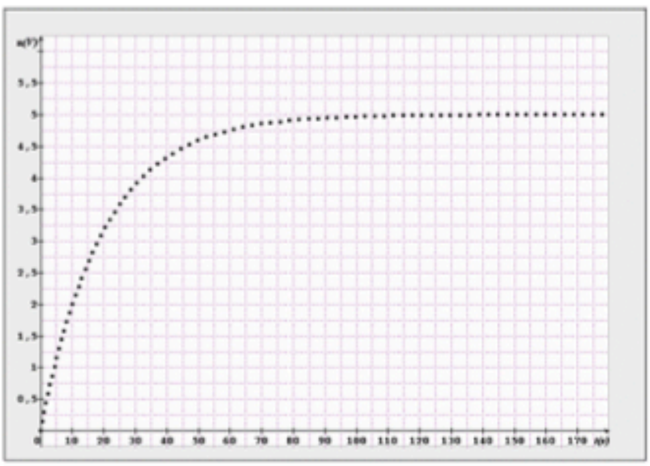
Or $q_A(t) = C.u(t)$ donc le quotient $\frac{q_A}{u} = C$ représente la capacité du condensateur.
On a C = 1,0 F.

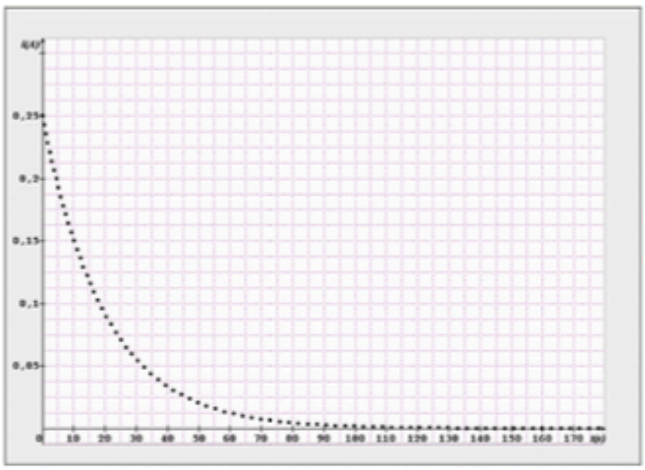
2. Charge d'un condensateur à tension constante.

Une autre manière de déterminer la valeur de la capacité d'un condensateur, consiste à charger ce dernier avec un générateur de tension constante E = 5,0 V associé à une résistance R = 20 Ω, en série avec le condensateur selon le schéma suivant :



On ferme l'interrupteur K à t = 0 s, un dispositif informatique (acquisition et traitement) permet d'obtenir les variations de l'intensité dans le circuit et de la tension aux bornes du condensateur au cours du temps. On obtient les deux courbes ci-dessous :

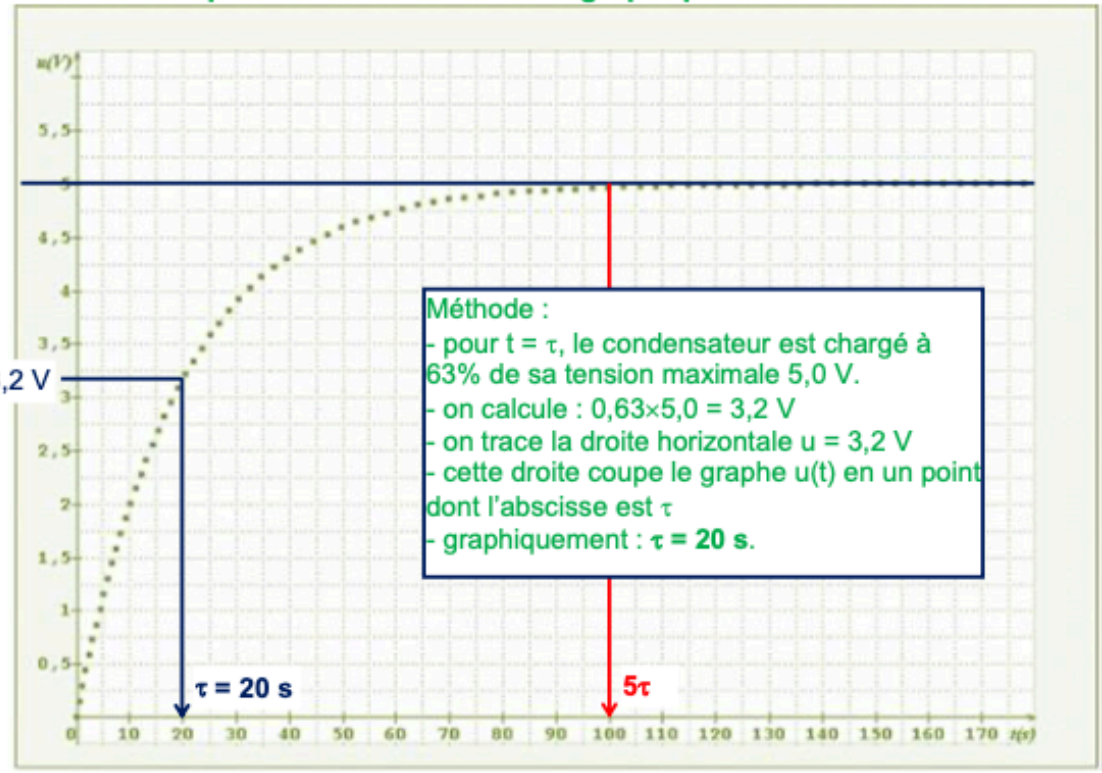




2.a) D'après les graphes, quelles sont les valeurs de u et i lorsque le condensateur est chargé ?
D'après les graphes, lorsque le condensateur est chargé, pour t→∞ : u = 5,0 V et i = 0 A.

2.b) Rappeler l'expression de la constante de temps τ du circuit. La déterminer graphiquement en précisant la méthode.

Constante de temps τ = RC. Détermination graphique :

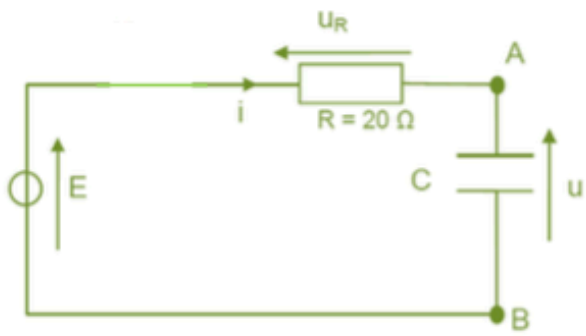


2.c) En déduire la valeur de la capacité du condensateur. Comparer avec la valeur obtenue dans la partie 1, question 1.4.

$C = \frac{\tau}{R}$ soit $C = \frac{20}{20}$ = 1,0 F.

La valeur de la capacité est égale à celle obtenue dans la partie 1, question 1.4.

2.d) En respectant les notations du montage, montrer que la tension u vérifie l'équation différentielle : $E = RC.\frac{du}{dt} + u$



Avec les notations du montage, ci-contre :

Loi d'additivité des tensions : $E = u_R(t) + u(t)$ (1)

Loi d'Ohm : $u_R(t) = R.i(t)$ (2)

Intensité : $i(t) = \frac{dq_A}{dt}$ avec $q_A(t) = C.u(t)$, comme C est une constante : $i(t) = \frac{dq_A}{dt} = \frac{d(C.u)}{dt} = C.\frac{du}{dt}$

en reportant dans (2) : $u_R(t) = R.i(t) = R.\ C.\frac{du}{dt}$ finalement en reportant dans (1) : $E = RC.\frac{du}{dt} + u$

2.e) La solution de cette équation différentielle est de la forme $u(t) = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$où τ est la constante de temps du circuit. Montrer que pour t = 5τ , le condensateur est quasiment chargé. Le vérifier graphiquement.

$u(5\tau) = E.(1 - e^{-5\tau/\tau}) = E.(1 - e^{-5}) \approx E.(1 - 0{,}0067) \approx E = 5{,}0$ V.

Donc pour t = 5τ , le condensateur est quasiment chargé.

Graphiquement, pour 5τ = 100 s, on vérifie que u(5τ) ≈ E.

Type Bac : Une lampe (~ 1h10)

De nouvelles lampes dites écologiques ont fait leur apparition sur le marché. On se propose, dans cet exercice, d'étudier leur dispositif de stockage de l'énergie électrique.

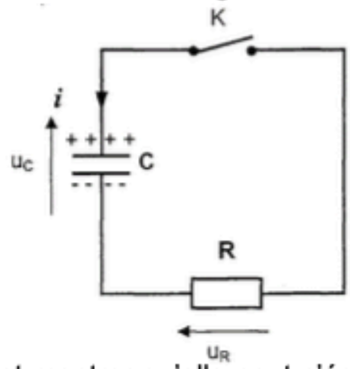
> Nous avons cherché longtemps une solution à l'éternel problème de la lampe de secours (voiture, bateau, maison, camping, avion…) qui, bien sûr, ne marche jamais quand on en a besoin. Au mieux les piles sont « mortes », au pire elles ont coulé ou l'ampoule est grillée quand ce ne sont pas les contacts qui sont corrodés. […]
> Aux USA, un petit fabriquant a mis à profit l'arrivée des DEL pour réaliser l'un de ses rêves, la « lampe sans pile ».
> **Fonctionnement :** En secouant (un peu comme une bombe de peinture mais plus doucement) la lampe 30 secondes, de l'énergie électrique est produite et stockée dans un condensateur. Vous obtenez alors environ 20 min d'une lumière produite par une DEL.
> Si vous n'utilisez pas toute l'énergie produite elle restera stockée dans le condensateur pendant plusieurs semaines pour être immédiatement disponible sur simple pression du bouton.
> **Information sur les composants :**
> Le condensateur a une capacité d'un farad et peut stocker au maximum une énergie égale à 12 J. Il perd 8 mJ par heure.
>
> D'après : http://www.lampesdepoche.com

On considère qu'en secouant la lampe durant trente secondes le condensateur est chargé et la tension entre ses bornes est U_0 = 3,6 V.

1. Le dipôle RC

On étudie la décharge du condensateur de capacité C =1,0 F à travers un conducteur ohmique de résistance R.

À t_0 = 0 s, on ferme l'interrupteur K et la décharge débute.



Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pendant la décharge et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = 0$ où $\tau = R.C$ est la constante de temps du circuit.

D'après la loi d'additivité des tensions : $u_C + u_R = 0$
d'après la loi d'Ohm $u_C + R.i = 0$

$i = \frac{dq}{dt}$ avec $q = C.u_C$ avec C = Cte alors $i = \frac{dC.u_C}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$
$u_C + R.C.\frac{du_C}{dt} = 0$

En divisant par RC, il vient $\frac{1}{R.C}u_C + \frac{du_C}{dt} = 0$.

Avec τ = R.C., on retrouve $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C = 0$.

1.a) Vérifier par une analyse dimensionnelle que la constante de temps τ est homogène à un temps.

D'après 1.1., on a $i = C.\frac{du_C}{dt}$, soit $[I] = [C].\frac{[U]}{[T]}$ donc $[C] = \frac{[I].[T]}{[U]}$
D'après la loi d'Ohm, $u_R = R.i$ soit [U] = [R].[I] donc $[R] = \frac{[U]}{[I]}$
[τ] = [R.C] = [R].[C]

$[\tau] = \frac{[U]}{[I]} . \frac{[I].[T]}{[U]}$ = [T] la constante de temps est homogène à une durée.

1.b) Montrer que $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

Avec $u_C = U_0.e^{-t/\tau}$ (1), alors $\frac{du_C}{dt} = \frac{dU_0.e^{-\frac{t}{\tau}}}{dt}$ avec U_0 = Cte donc $\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{\tau}.e^{-t/\tau}$ (2)

Introduisons ces expressions (1) et (2) dans l'équation différentielle :
$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C = -\frac{U_0}{\tau}.e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau}.U_0.e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}.(-\frac{U_0}{\tau} + \frac{1}{\tau}.U_0) = 0$ quel que soit t.

La solution proposée convient.

1.c) En déduire qu'une durée environ égale à 5τ permet une décharge quasi-complète du condensateur.
$u_C(5\tau) = U_0.e^{-5\tau/\tau} = U_0.e^{-5}$
$u_C(5\tau) = 6{,}74\times10^{-3}.U_0$

La tension u_C au bout d'une durée égale à 5 τ est égale à 0,674 % de sa valeur initiale U_0 , on peut considérer que la décharge est complète.

1.d) Si l'on considère que cette durée est égale à vingt minutes, déterminer la valeur de la résistance *R* du conducteur ohmique qu'il faut alors associer au condensateur de capacité *C* = 1,0 F.
5τ = 20 min et τ = R.C donc R = τ/C avec τ en secondes.
$R = \frac{\frac{20\times60}{5}}{1{,}0} = 2{,}4\times10^2\ \Omega$

2. Énergie emmagasinée dans le dipôle RC

2.a) Lors du « secouement » de la lampe, il y a conversion d'énergie. Choisir parmi les propositions suivantes celle qui décrit le mieux la situation :

- **i)** Conversion d'énergie électrique en énergie mécanique ;
- **ii)** Conversion d'énergie chimique en énergie électrique ;
- **iii)** Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique ;
- **iv)** Conversion d'énergie mécanique en énergie chimique.

La proposition c) convient, il y a conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

2.b) Rappeler l'expression de l'énergie *E(t)* emmagasinée dans le condensateur au cours du temps en fonction de $u_C(t)$ et *C*.
$E(t) = \frac{1}{2}.C.u_C(t)$

2.c) Calculer l'énergie E_{max} emmagasinée dans le condensateur à l'issue de sa charge lorsque la tension à entre ses bornes est U_0 = 3,6 V. Vérifier qu'elle ne dépasse pas les performances annoncées par le constructeur.
$E_{max} = \frac{1}{2}.C.u_0^2$
$E_{max} = 0{,}5 \times 1{,}0 \times 3{,}6^2 = 6{,}5$ J < 12 J ne dépassant pas les performances annoncées par le constructeur.

2.d) Vérifier par un calcul que la lampe ne pourra pas fonctionner sans être « secouée » après plusieurs semaines sans utilisation.
Le texte indique que le condensateur perd 8 mJ (8×10^{-3} J) par heure.
Calculons la durée nécessaire pour qu'il perde toute son énergie électrique.
$\Delta t = \frac{E_{max}}{8\times10^{-3}} = \frac{\frac{1}{2}.C.u_0^2}{8\times10^{-3}}$

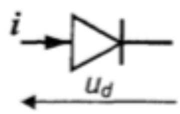
$\Delta t = 8{,}1 \times 10^2$ h
$\Delta t = \frac{8{,}1 \times 10^2}{7 \times 24} = 4{,}8$ semaines.

Au bout d'environ 5 semaines sans utilisation, le condensateur a perdu toute son énergie électrique. Il faut alors secouer la lampe pour qu'elle fonctionne.

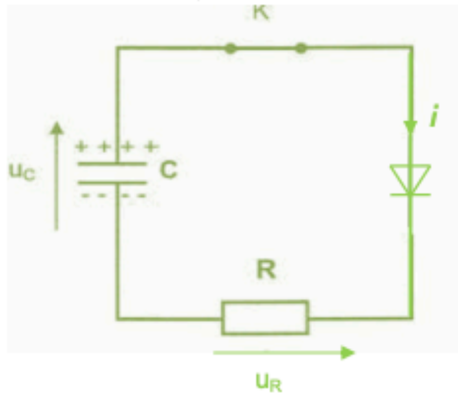
3. Simulation de l'éclairage

On peut simuler le fonctionnement de la lampe en ajoutant en série, dans le circuit de décharge du condensateur, une diode électroluminescente (DEL) composant polarisé.

Une diode ne laisse passer le courant que dans le sens indiqué sur le schéma ci-dessous (appelé sens passant) et à la condition que la tension u_d entre ses bornes soit supérieure ou égale à une tension appelée tension de seuil soit ici $U_{seuil} = 3{,}0$ V. De plus, on considère que la diode possède une résistance r supposée constante.



3.a) Recopier le schéma du circuit représenté figure 1, et ajouter, en série avec la résistance R, une diode électroluminescente qui laisse passer le courant lors de la décharge du condensateur.
Ajout de la DEL sur le schéma :



3.b) Pourquoi le condensateur ne peut-il pas se décharger complètement ?
Dès que la tension aux bornes de la diode est inférieure ou égale à $U_{seuil} = 3{,}0$ V, le courant ne peut plus circuler dans le circuit. Le condensateur ne peut plus se décharger alors qu'il y a encore de la tension à ses bornes.

3.c) La durée d'évolution de la tension aux bornes du condensateur de 3,6 V à 3,0 V est-elle modifiée par la présence de la DEL dans le montage ? Justifier.
Le texte indique que la diode possède une résistance r.
Lors de la décharge $u_C = U_0.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = (R+r).C$ donc la durée d'évolution de la tension aux bornes du condensateur de 3,6 V à 3,0 V est modifiée par la présence de la DEL.

3.d) Pour décharger complètement le condensateur dans le montage précédent, on propose plusieurs solutions :

- Inverser le sens de la diode ;
- Augmenter la valeur de la résistance R ;
- Court-circuiter le condensateur ;
- Court-circuiter la diode ;

Choisir la ou les solution(s) permettant la décharge complète en donnant un argument justifiant ce choix.
Pour décharger complétement le condensateur, deux solutions sont possibles :
- on peut court-circuiter le condensateur, un fil reliant ses armatures permet aux électrons accumulés sur l'armature chargée négativement de passer instantanément sur l'armature chargée positivement.
- on peut court-circuiter la diode, elle n'empêche plus le courant de circuler lors de la décharge.

Type Bac : Lumière fluorescente (~ 1h30)

Les tubes fluorescents sont un type particulier de lampes électriques qui produisent de la lumière grâce à une décharge électrique. Leur lumière peut être blanche (pour l'éclairage) ou colorée (par exemple, pour la fabrication d'enseignes lumineuses). Les différentes couleurs obtenues dépendent de la nature du gaz utilisé dans les tubes ; ainsi, les lumières bleue, jaune ou rouge sont dues respectivement à la présence de mercure, de sodium ou de néon... Ces lampes sont d'ailleurs appelées par abus de langage « néons ». La tension électrique, appelée tension d'allumage, nécessaire pour produire la décharge électrique lors de l'allumage de ces lampes peut être produite dans un circuit électrique assimilé à un condensateur et un conducteur ohmique placés en série.

Cet exercice a pour objectif d'une part de comprendre comment le circuit électrique proposé dans le texte précédent permet d'allumer et d'éteindre un tube fluorescent et d'autre part d'étudier l'aspect visuel du phénomène.

Le circuit électrique, dans lequel est inséré le tube fluorescent, est schématisé sur la figure 3 ci-dessous.

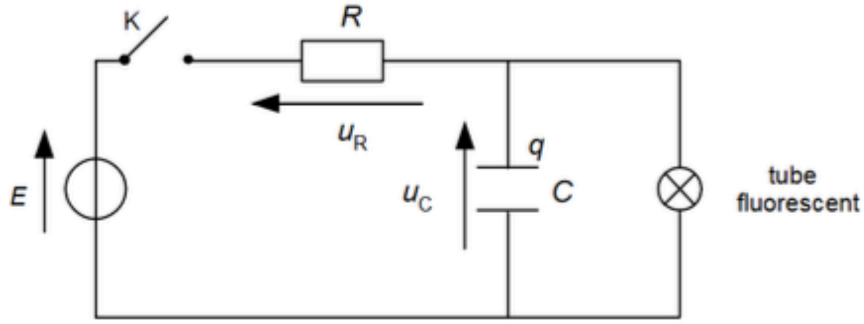


Figure 3. Schéma du circuit

Le tube fluorescent s'allume quand la tension à ses bornes dépasse 80 V, cette tension appelée tension d'allumage est notée U_a. Il s'éteint quand la tension u_c redescend sous la valeur de 30 V appelée tension d'extinction, notée U_e.

Quand le tube fluorescent est éteint, il se comporte comme un interrupteur ouvert. Par contre, lorsqu'il est allumé, il se comporte comme un conducteur ohmique de faible résistance.

Un système informatisé d'acquisition de données permet de visualiser la tension uC(t) en fonction du temps. À un instant t = 0 pris comme origine des dates, le tube fluorescent étant éteint, le condensateur n'étant pas chargé, on ferme l'interrupteur. On obtient le graphe de la figure 4 page 6.

Données :

- tension aux bornes du générateur: E = 100 V ;
- capacité du condensateur : C = 0,60 μF ;
- résistance du conducteur ohmique : R = 60 kΩ.

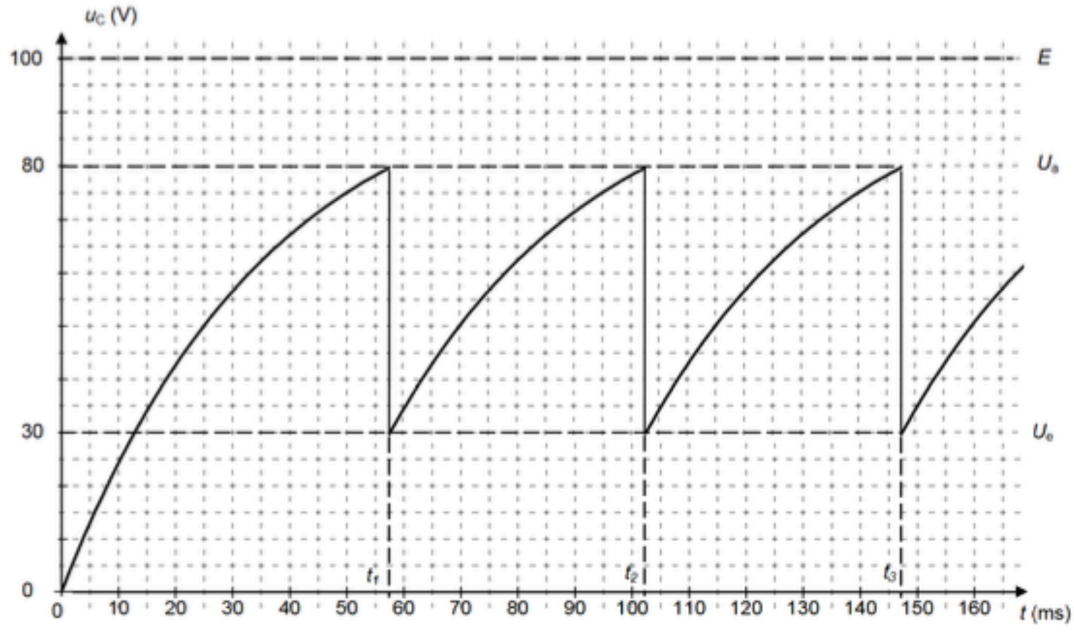


Figure 4. Évolution de la tension aux bornes du condensateur

1. Étude de l'évolution de la tension uC(t) dans la partie initiale comprise entre 0 et t_1

À un instant t = 0 pris comme origine des dates (tube fluorescent éteint, condensateur déchargé), l'interrupteur K est fermé. Le circuit précédent peut être simplifié selon le schéma de la figure 5 ci-dessous car le tube fluorescent se comporte comme un interrupteur ouvert.

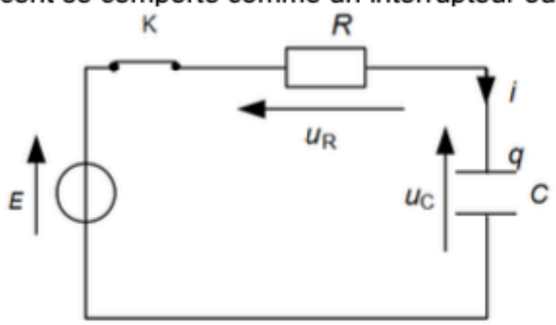


Figure 5. Schéma du circuit simplifié

1.a) Quel phénomène électrique se produit au niveau du condensateur quand on ferme l'interrupteur K ?

Quand on ferme l'interrupteur K, le condensateur se charge : des électrons s'accumulent sur l'armature reliée à la borne négative du générateur, tandis que des charges positives apparaissent sur l'autre armature.

1.b) Établissement de l'équation différentielle régissant le fonctionnement de ce circuit.

i- Exprimer la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de la charge q(t) et de la capacité C du condensateur.

La relation charge-tension pour un condensateur fléché comme sur le précédent schéma est $u_C(t) = \frac{1}{C}.q(t)$.

ii- Écrire la relation entre la tension uR(t), l'intensité du courant i(t) et la résistance R.

La loi d'Ohm permet d'écrire $u_R(t) = R.i(t)$.

iii- Donner la relation liant i(t) et q(t). En déduire la relation liant i(t) et u_C(t).
Par définition de l'intensité du courant électrique, et étant donné le fléchage du circuit, on peut écrire $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.
Avec q(t) = C.u(t), on en déduit que $i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$.

iv- Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension uC(t) au cours du temps.
La loi des mailles appliquée au circuit donne E –u_R(t) – u_C(t) = 0,
soit $E - Ri(t) - u_C(t) = 0$,
qu'on peut récrire sous la forme $E = Ri(t) + u_C(t)$,

soit finalement : $E = R.C.\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$.

v- Vérifier que l'expression $U_C(t) = E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ est bien solution de cette équation différentielle.
D'après l'expression donnée $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ = E – E.$e^{-t/R.C}$, ainsi on a $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{R.C}}$

En remplaçant dans l'équation différentielle :
$R.C.\left(\frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{R.C}}\right) + E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = E.e^{-\frac{t}{RC}} + E - E.e^{-\frac{t}{RC}} = E$ la solution proposée convient.

1.c) À l'instant t_1, le tube s'allume. La tension aux bornes du condensateur vaut alors Ua appelée tension d'allumage.

i- D'après l'expression de u_C(t) donnée à la question 1.2.5, quelle est la valeur maximale théorique que pourrait atteindre la tension u_C aux bornes du condensateur ?
D'après l'expression de $u_C(t)$ donnée à la question 1.b)v-, qui est une fonction strictement croissante du temps, la valeur maximale théorique que pourrait atteindre la tension u_C aux bornes du condensateur serait :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(u_C(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = E(1-0) = E = 100\text{ V}.$$

Mais la figure 4 montre que la charge s'arrête avant, lorsque la tension atteint les 80 V nécessaires à l'allumage du tube fluorescent.

ii- Donner l'expression de la constante de temps τ pour le circuit de la figure 5. Calculer sa valeur.
La constante de temps du circuit vaut $\tau = RC$
$\tau = 60 \times 10^3 \times 0,60 \times 10^{-6} = 36 \times 10^{-3}\text{ s} = 36\text{ ms}$.

2. Étude des oscillations

L'interrupteur K de la figure 3 étant toujours fermé, à partir de la date t_1, le tube fluorescent est allumé. Il se comporte alors comme un conducteur ohmique de faible résistance r = 10 Ω. <u>La résistance R étant très supérieure à la résistance r</u>, le schéma de la figure 3 se simplifie comme représenté sur la figure 6.

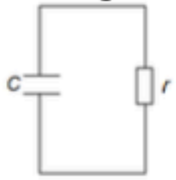


Figure 6. Schéma équivalent du montage simplifié quand le tube est allumé

2.a) Quel phénomène électrique se produit au niveau du condensateur juste après l'allumage ?
Juste après l'allumage se produit la décharge du condensateur.

2.b) Calculer le rapport $\frac{\tau}{\tau'}$ où τ' est la constante de temps du dipôle (r, C) ainsi constitué.
Que faudrait-il faire au niveau de l'acquisition, si on voulait déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ' du dipôle (r, C) ?

La constante de temps de ce circuit étant $\tau' = rC$, on a $\frac{\tau}{\tau'} = \frac{RC}{rC} = \frac{R}{r} = \frac{60\times10^3}{10} = 6,0 \times 10^3$: la nouvelle constante de temps est six mille fois inférieure à celle de la charge.
Pour déterminer graphiquement τ', il faudrait faire commencer l'acquisition à t_1 et choisir une durée d'acquisition 6000 fois plus petite (« zoomer » 6000 fois sur la courbe).

2.c) Quand la tension u_C atteint la valeur de la tension d'extinction U_e = 30 V, le tube fluorescent s'éteint. Que se produit-il à nouveau au niveau du condensateur ?
Une fois que le tube fluorescent s'éteint, on revient au schéma équivalent précédent et le condensateur se charge à nouveau.

2.d) Le tube est allumé pendant la décroissance de la tension de 80 V à 30 V et éteint dans la partie croissante de 30 V à 80 V. Que peut-on dire des durées pendant lesquelles le tube est allumé par rapport à celles où il est éteint ?
Au vu de la courbe obtenue (ou des constantes de temps calculées), on peut dire que le tube reste éteint (pendant la charge) bien plus longtemps qu'allumé (pendant la décharge quasi-instantanée).

2.e) Choisir, en les justifiant, le ou les adjectif(s) permettant de qualifier le régime observé. À partir de l'instant t_1 on obtient un régime : apériodique - sinusoïdal - amorti - périodique - alternatif.
Les cycles charge-décharge se répétant à l'identique et à l'infini, on a affaire à un régime périodique.

2.f) Que se passerait-il si la tension aux bornes du générateur avait été réglée à la valeur E = 60 V ? Justifier votre réponse.
Si $u_C^{max} = E = 60\ V$, on n'atteindrait jamais la tension d'allumage de 80 V et le tube fluorescent ne s'allumerait jamais, la tension aux bornes du condensateur restant « bloquée » à 60 V indéfiniment.

3. Perception visuelle
Les successions d'allumages et d'extinctions du tube fluorescent peuvent ne pas se voir du fait de la persistance rétinienne des images. En effet, pour une intensité lumineuse telle que celle émise par ce tube, notre cerveau met environ 50 ms à « éliminer » une image de la rétine de l'œil.

3.a) Mesurer sur le graphe de la figure 4 la durée Δt d'un cycle allumage-extinction.
Sur la figure 4, on mesure une durée d'un cycle allumage-extinction $\Delta t \approx 45\ ms$.

3.b) Que voit une personne qui regarde le tube fluorescent dans le cas de l'expérience précédemment étudiée ? Justifier votre réponse.
Puisque la rétine de la personne qui regarde le tube fluorescent a une persistance de 50 ms > 45 ms, celle-ci voit le tube fluorescent constamment allumé.

3.c) On multiplie par cinq la valeur de la capacité C du condensateur dans le circuit de la figure 3, les autres paramètres de l'expérience initiale n'étant pas modifiés. Que voit désormais une personne qui regarde le tube fluorescent (aucun calcul n'est demandé) ?
En multipliant par cinq la valeur de la capacité C du condensateur, la durée d'un cycle sera cinq fois plus longue, donc largement supérieure à 50 ms et la personne verra le tube fluorescent clignoter (non demandé par le sujet : à une période d'environ 5 × 45 ms = 225 ms soit un peu plus de 4 fois par seconde).